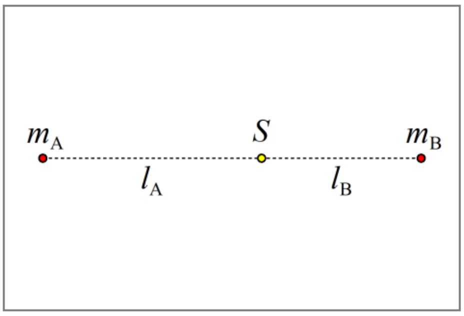
A tömegközéppont. A tömegközéppont-tétel

Egy seregélycsapat repülését nézve lehetetlen minden egyes madár mozgását nyomon követni. Ha azonban azt látjuk, hogy a seregélyek átrepülnek a gyümölcsösből a szőlőbe, akkor szemünkkel követhetjük a csapat egészét, és a megtett út és az eltelt idő alapján meghatározhatjuk a sebességüket. Ugyanígy a tűzijáték egy-egy felrobbanó töltetének világító darabjaihoz is hozzárendelhető egy olyan sebesség, amely valamilyen módon az egész rendszerre jellemző. Az így meghatározott sebesség nem az egyes testek mozgását jellemzi, hanem az egész rendszerét. A megfigyelések azt mutatják, hogy minden pontrendszernél található egy olyan pont, amelynek mozgása jól jellemzi az egész rendszer haladó mozgását. Ezt a pontot a rendszer *tömegközéppontjának* nevezzük.



Két pontszerű testből álló rendszernél tömegközéppontnak nevezzük azt a pontot, amely a két testet összekötő egyenes szakaszon van, és távolsága az egyes testektől fordítottan arányos a testek tömegével, azaz

$$m_A \cdot l_A = m_B \cdot l_B$$

Ennek megfelelően egyenlő tömegeknél a tömegközéppont középen van, különböző tömegeknél pedig a nagyobb tömegű testhez van közelebb.

Több testből álló rendszer tömegközéppontját a következőképpen értelmezzük. Megkeressük a rendszer két tagjának tömegközéppontját, majd e két testet gondolatban ebben a tömegközéppontban egyesítjük, azaz egyetlen olyan testtel helyettesítjük őket, melynek tömege megegyezik a két test tömegének összegével. Ezt követően ezt az eljárást ismételjük mindaddig, míg egyetlen ponthoz nem jutunk. Az így kapott pontot nevezzük a rendszer tömegközéppontjának. (Bebizonyítható, hogy bármilyen sorrendben hajtjuk is végre ezt az eljárást, mindig ugyanahhoz a ponthoz jutunk.)

A tömegközéppont fogalmának segítségével a dinamika alapegyenletéhez hasonló összefüggés fogalmazható meg: *A pontrendszer össztömegének és a tömegközéppont gyorsulásának a szorzata megegyezik a rendszerre ható külső erők vektori összegével.*

$$m \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} = \Sigma \boldsymbol{F}_{\mathrm{k}}$$

Ezt az összefüggést a pontrendszerre vonatkozó *tömegközéppont-tétel*nek nevezzük. A tétel szerint a rendszer tömegközéppontjának mozgását csak a külső erők határozzák meg, a belső erők nem befolyásolják mozgását. Mindez jól megfigyelhető például a tűzijátéknál. A tűzijáték-töltet felrobbanásakor fellépő belső erők az egyes részecskék mozgását befolyásolják, de az egész rendszer tömegközéppontja az eredeti parabolapályán halad tovább.

Ha a pontrendszer zárt, akkor a külső erők vektori összege nullvektor, így a tömegközéppont-tétel alapján:

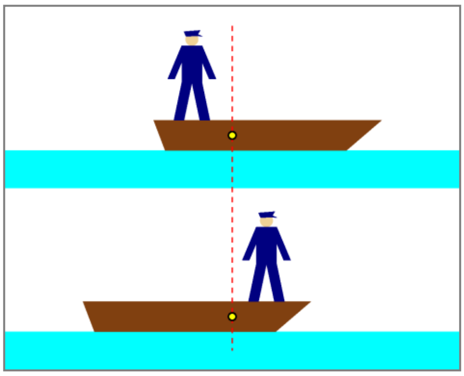
$$m \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{0}$$

Mindkét oldalt elosztva a rendszer tömegével:

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{0}$$

A tömegközéppont tehát ilyen esetben nem gyorsul, azaz sebessége állandó. Ezek alapján megfogalmazható a *tömegközéppont sebességének megmaradási tétele*: *A zárt rendszer tömegközéppontja egyenes vonalú egyenletes mozgást végez vagy nyugalomban van.*

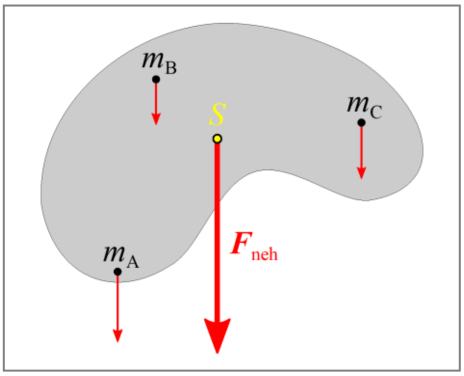
$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{t}} = \text{állandó}, \qquad \text{ha} \qquad \Sigma \boldsymbol{F}_{\mathrm{k}} = 0$$



Ha például a tavon nyugvó csónakon valaki a csónak hátuljából előremegy, akkor a csónak elmozdul hátrafelé, de a rendszer tömegközéppontja ugyanott marad.

Kiegészítés

1. A kiterjedt testeknél nehézségi erőnek nevezzük a test részecskéire ható nehézségi erők vektori összegét. Ennek alapján:



$$\boldsymbol{F}_{\text{neh}} = m_A \cdot \boldsymbol{g} + m_B \cdot \boldsymbol{g} + m_C \cdot \boldsymbol{g} + \ \dots$$

$$\boldsymbol{F}_{\text{neh}} = (m_A + m_B + m_C + \ \dots) \cdot \boldsymbol{g}$$

$$\boldsymbol{F}_{\text{neh}} = m \cdot \boldsymbol{g}$$

Ha a testre csak a nehézségi erő hat, akkor a tömegközéppont-tételt és az előbbi összefüggést felhasználva meghatározható a tömegközéppont gyorsulása:

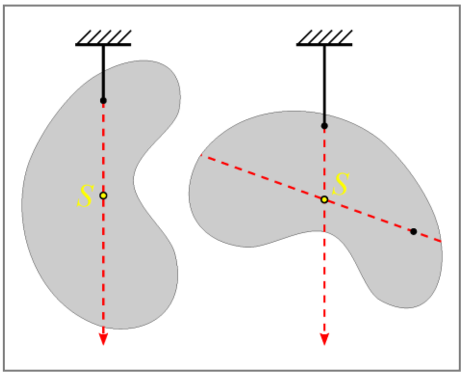
$$m \cdot \boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{F}_{\text{neh}}$$

$$m \cdot \boldsymbol{a}_t = m \cdot \boldsymbol{g}$$

$$\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{g}$$

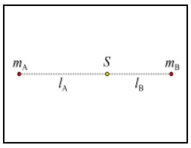
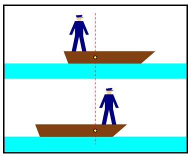
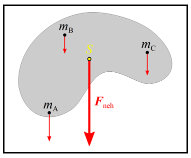
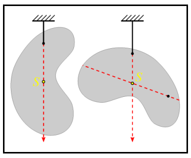
Ha a kiterjedt testre csupán a nehézségi erő hat, a test tömegközéppontjának gyorsulása $\boldsymbol{g}$, azaz a tömegközéppont úgy mozog, mintha a nehézségi erő a tömegközéppontban hatna és ebben a pontban összpontosulna a test teljes tömege.

2. Ha egy kiterjedt szilárd testet egy pontjánál fogva felfüggesztünk, akkor a felfüggesztési ponton átmenő függőleges egyenest *súlyvonalnak* nevezzük. Igazolható, hogy a testet különböző pontjaiban felfüggesztve a súlyvonalak egyetlen pontban metszik egymást. A súlyvonalak metszéspontját *súlypontnak* nevezzük. Kísérletekkel igazolható, hogy *a tárgyak súlypontja és tömegközéppontja egybeesik*, ezért gyakran nem tesznek különbséget a két elnevezés között, és a tömegközéppontot is többnyire *S* betűvel jelölik.



3. Ha egy test nem homogén, akkor a tömegközéppont (súlypont) nem a test közepén van. Ez egészen meglepő, szokatlan is lehet. Egy ezt bemutató videó *Antigravitációs könyv* címmel itt található: https://www.youtube.com/watch?v=rnnQRQRXkMg.

Képek jegyzéke

	**Seregélycsapat** W https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Flock_of_starlings_(Sturnus_vulgaris).webm (Videó)
	**A tömegközéppont helye** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0152.svg
	**Pontrendszerre ható erők** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0153.svg
	**Kiterjedt testre ható nehézségi erő** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0154.svg
	**Súlyvonalak és a súlypont** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0155.svg

Jelmagyarázat:

© **Jogvédett anyag**, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.

W A ***Wikimedia Commons***-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásának megfelelően.