

◀	<i>Tartalom</i>	<i>Fogalmak</i>	<i>Törvények</i>	<i>Képletek</i>	<i>Lexikon</i>	▶
---	-----------------	-----------------	------------------	-----------------	----------------	---

A forgómozgás alapegyenlete merev testre

A forgómozgást végző merev test minden egyes pontjára felírhatjuk a forgómozgás alapegyenletét:

$$\theta_A \cdot \beta = M_A$$

$$\theta_B \cdot \beta = M_B$$

$$\theta_C \cdot \beta = M_C$$

⋮

Az egyenletek felírásakor felhasználtuk, hogy a forgó merev test minden pontjának azonos a szöggyorsulása. (Az egyenletek jobb oldalán az $M_A, M_B, M_C \dots$ az adott pontra ható erők eredőjének forgatónyomatékát jelöli.) Az egyenleteket összeadva:

$$\theta_A \cdot \beta + \theta_B \cdot \beta + \theta_C \cdot \beta + \dots = M_A + M_B + M_C + \dots$$

$$(\theta_A + \theta_B + \theta_C + \dots) \cdot \beta = M_A + M_B + M_C + \dots$$

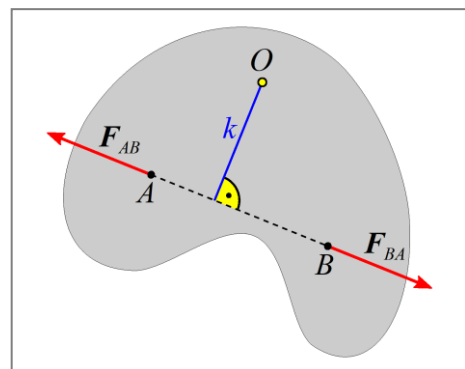
A merev testnél az egyes részecskék tehetetlenségi nyomatékának összegét a rendszer tehetetlenségi nyomatékának nevezzük.

$$\theta = \theta_A + \theta_B + \theta_C + \dots$$

Ezt felhasználva:

$$\theta \cdot \beta = M_A + M_B + M_C + \dots$$

A jobb oldalon a testre ható összes erő forgatónyomatéka szerepel. A belső erők forgatónyomatékának összege azonban nulla. Az A és a B jelű részecske közti belső erők ugyanis a hatás-ellenhatás törvénye miatt azonos nagyságúak, ellentétes irányúak és hatásvonaluk közös, ezért a két erőhöz tartozó erőkar is ugyanakkora. Ennek következtében e két belső erő forgatónyomatéka kiegyenlíti egymást, azaz forgatónyomatékaik



összege nulla. Ezt a gondolatmenetet minden, egymásra belső erőt kifejtő részecskepárra alkalmazva kapjuk, hogy a belső erők összes forgatónyomatéka nulla. Ezt felhasználva a *forgómozgás alapegyenletének* merev testre vonatkozó alakját kapjuk: *A merev test tehetetlenségi nyomatékának és szöggyorsulásának szorzata megegyezik a merev testre ható (külső) erők forgatónyomatékának összegével.* Képlettel:

$$\theta \cdot \beta = \Sigma M_k$$

Abban az esetben, ha a merev testre ható erők forgatónyomatékának összege nulla, akkor az előbbi összefüggés alapján:

$$\theta \cdot \beta = 0$$

Mindkét oldalt osztva a tehetetlenségi nyomatékkal:

$$\beta = 0$$

A merev test szöggyorsulása ilyenkor nulla, tehát a test szögsebessége állandó:

$$\omega = \text{állandó}$$

Eszerint, *ha a merev testre ható erők forgatónyomatékának összege nulla, akkor a test szögsebessége állandó*

$$\omega = \text{állandó}, \quad \text{ha } \Sigma M_k = 0$$

Kiegészítés

1. Leonhard Euler (1707–1783) svájci matematikus, fizikus definiálta 1765-ben. Számítással számos test tehetetlenségi nyomatékát is meghatározta. Euler matematikusként is jelentős eredményeket ért el, a matematika szinte minden területével foglalkozott. Élete során közel 900 művet írt.

2. A tehetetlenségi nyomaték nagysága függ a tengely helyzetétől is. Ezért a tehetetlenségi nyomatéknál meg kell adni a tengely helyzetét is.

3. A merev testek tehetetlenségi nyomatéka általában csak mérésel állapítható meg, de néhány egyszerűbb esetben számítással is meghatározható. Ilyen számítások



eredményét foglalja össze az alábbi táblázat, amely *homogén* (azonos anyagú) testek tehetetlenségi nyomatékát tartalmazza a *tömegközépponton átmenő tengelyek* esetében. (Az m a test tömegét jelöli.)

TEST	θ	TENGYELY	MEGJEGYZÉS
Henger	$\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$	az alkotóval párhuzamos	r a henger sugara
Pálca	$\frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2$	a pálcára merőleges	l a pálca hossza
Gömb	$\frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$	bármely	r a gömb sugara
Kocka	$\frac{1}{6} \cdot m \cdot a^2$	bármely	a a kocka élhossza

Példa

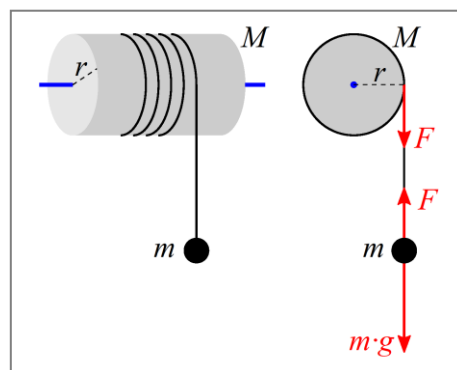
Egy 5 cm sugarú, 0,2 kg tömegű henger vízszintes tengely körül foroghat. A hengerre feltekert fonálon egy 0,1 kg tömegű nehezék függ. Mekkora a nehezék gyorsulása, ha a rendszert magára hagyjuk.

$$r = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$$

$$M = 0,2 \text{ kg}$$

$$m = 0,1 \text{ kg}$$

$$a = ?$$



Kiindulásként írjuk fel a nehezékre a dinamika alapegyenletét, a hengerre pedig a forgómozgás alapegyenletét!

Az m tömegű nehezékre két erő hat: az $m \cdot g$ nagyságú nehézségi erő és a fonál által kifejtett F húzóerő. A két erő ellentétes irányú, és eredőjük lefelé mutat, hiszen az elengedett nehezék lefelé gyorsul. A *dinamika alapegyenlete* szerint:

$$m \cdot a = m \cdot g - F \tag{1}$$

A hengerre három erő hat: a fonál által kifejtett F húzóerő, az $M \cdot g$ nagyságú nehézségi erő, valamint a felfüggesztés által kifejtett F_t tartóerő. A nehézségi erő és a tartóerő

hatásvonala átmegy a henger középpontján, ezért a tengelyre vonatkozó forgatónyomatékuk nulla. (A rajzon ezért ezt a két erőt nem is tüntettük fel.) Ezt figyelembe véve a *forgómozgás alapegyenlete*:

$$\Theta \cdot \beta = F \cdot r \quad (2)$$

A nehezék és a fonál részecskéi is a nagyságú gyorsulással mozognak. Ennek megfelelően a henger kerületén fekvő pontok érintőirányú gyorsulása is a nagyságú. Az érintőirányú gyorsulás és szöggyorsulás közti összefüggés alapján:

$$a = r \cdot \beta$$

$$\beta = \frac{a}{r}$$

Ezt a (2) egyenletbe helyettesítve:

$$\Theta \cdot \frac{a}{r} = F \cdot r$$

A henger tehetetlenségi nyomatékára vonatkozó képletet behelyettesítve:

$$\frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2 \cdot \frac{a}{r} = F \cdot r$$

$$\frac{1}{2} \cdot M \cdot a = F$$

Ebből és az (1) egyenletből álló egyenletrendszerből a gyorsulás meghatározható:

$$m \cdot a = m \cdot g - F$$

$$\frac{1}{2} \cdot M \cdot a = F$$

A két egyenletet összeadva:

$$m \cdot a + \frac{1}{2} \cdot M \cdot a = m \cdot g - F + F$$

$$\left(m + \frac{1}{2} \cdot M\right) \cdot a = m \cdot g$$

$$(2 \cdot m + M) \cdot a = 2 \cdot m \cdot g$$

$$a = \frac{2 \cdot m}{2 \cdot m + M} \cdot g = \frac{2 \cdot 0,1 \text{ kg}}{2 \cdot 0,1 \text{ kg} + 0,2 \text{ kg}} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Képek jegyzéke

	Belső erők forgatónyomatéka © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0169.svg
	Leonhard Euler W https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler.jpg
	Rajz a Példa megoldásához © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0170.svg

Jelmagyarázat:

- © **Jogvédtett anyag**, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.
- W A **Wikimedia Commons**-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásának megfelelően.