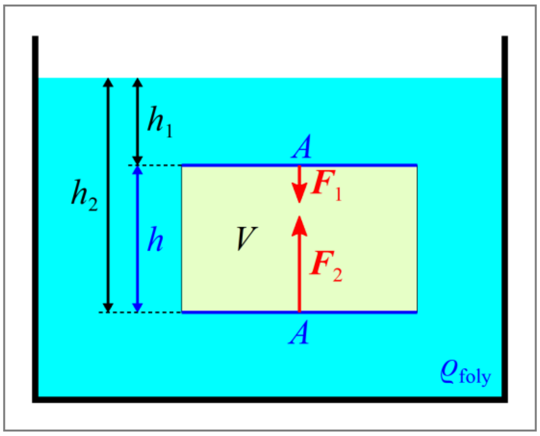
A felhajtóerő. Arkhimédész törvénye

A víz alá nyomott parafa dugó vagy pingponglabda feljön a víz felszínére. Hasonló jelenség figyelhető meg, ha a kísérletet más folyadékkal (étolaj, alkohol, higany) végezzük el. *A folyadékban elhelyezkedő testre felhajtóerő hat.* A hidrosztatikai nyomás miatt ugyanis a folyadék minden irányból nyomja a testet, de a test alsó felületére a nagyobb nyomás miatt nagyobb nyomóerő hat, mint a felsőre. Eszerint *a felhajtóerő a hidrosztatikai nyomás következménye*.



Egy folyadékban elhelyezkedő téglatestre ható felhajtóerő a fentiek alapján egyszerűen meghatározható. A rajz jelöléseit használva a fedőlapra ható nyomóerő nagysága:

$$F_1 = p_1 \cdot A = \varrho_{\text{foly}} \cdot g \cdot h_1 \cdot A \,.$$

Az alaplapra ható nyomóerő nagysága:

$$F_2 = p_2 \cdot A = \varrho_{\text{foly}} \cdot g \cdot h_2 \cdot A \,.$$

Az egymással szemben fekvő, azonos területű oldallapokra azonos nagyságú, de ellentétes irányú nyomóerők hatnak, így ezek kiegyenlítik egymást. (A rajzon ezek az erők nincsenek is feltüntetve.) A testre ható hidrosztatikai nyomóerők eredőjeként létrejövő felhajtóerő ezek szerint:

$$F_{\text{fel}} = F_2 - F_1 \,,$$

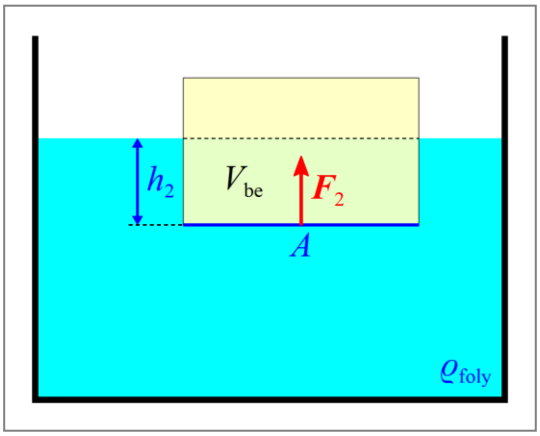
$$F_{\text{fel}} = \varrho_{\text{foly}} \cdot g \cdot h_2 \cdot A - \varrho_{\text{foly}} \cdot g \cdot h_1 \cdot A \,,$$

$$F_{\text{fel}} = \varrho_{\text{foly}} \cdot g \cdot A \cdot (h_2 - h_1) \,,$$

$$F_{\text{fel}} = \varrho_{\text{foly}} \cdot g \cdot A \cdot h \,,$$

$$F_{\text{fel}} = \varrho_{\text{foly}} \cdot g \cdot V \,.$$

Ha a testnek csak egy része van a folyadékban, akkor a fedőlapra nem hat hidrosztatikai nyomás. A testre ható hidrosztatikai nyomóerők eredőjeként létrejövő felhajtóerő ezek szerint:



$$F_{fel} = \varrho_{foly} \cdot g \cdot h_2 \cdot A \,,$$

$$F_{fel} = \varrho_{foly} \cdot g \cdot V_{be} \,. \qquad (1)$$

Igazolható, hogy ez az összefüggés bármilyen alakú testnél is érvényes. (Részletek a *Kiegészítések*-ben.) A Föld felszínén a nehézségi gyorsulás értéke gyakorlatilag állandó, így a fenti képlet szerint *a nyugvó folyadékban a felhajtóerő nagysága a folyadék sűrűségétől és a test folyadékba merülő részének térfogatától függ.*

Amikor egy testet folyadékba merítünk, akkor a folyadék egy részének a helyét a test foglalja el. Erről a helyről a test annyi folyadékot szorít ki, mint amennyi a test folyadékfelszín alatti részének térfogata. A kiszorított folyadék súlya:

$$G_{ki} = m_{ki} \cdot g = \varrho_{foly} \cdot V_{be} \cdot g \,,$$

azaz

$$G_{ki} = \varrho_{foly} \cdot V_{be} \cdot g \,.$$

A jobb oldalon álló kifejezés éppen megegyezik az (1) összefüggés jobb oldalával, ezért:

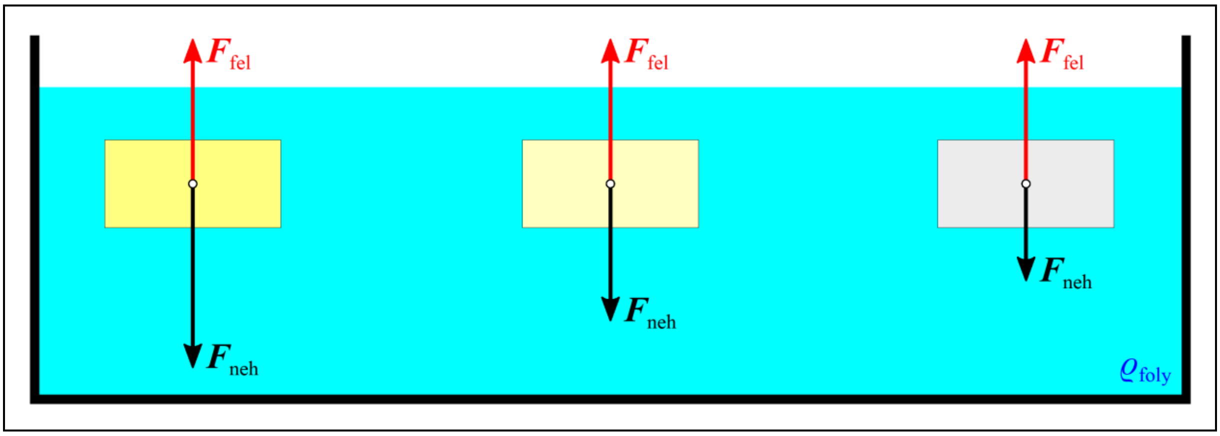
$$F_{fel} = G_{ki} \,.$$

A kapott összefüggést szöveggel megfogalmazva: *A nyugvó folyadékba merülő testre felhajtóerő hat, amelynek nagysága megegyezik a test által kiszorított folyadék súlyával.* Ezt az összefüggést *Arkhimédész törvényének* nevezzük.

A felhajtóerő következtében a testek súlya a folyadékban látszólag csökken. Valójában azonban a hatás–ellenhatás törvényének megfelelően a test is nyomja a folyadékot, és azon keresztül az edény alját. Így *a test súlyának egy része a felfüggesztésre, másik része a folyadékra hat.* Mindezt kísérlettel is ellenőrizhetjük, ha egy pohár vizet mérlegre helyezünk, és a vízbe egy cérnára kötött kavicsot lógatunk.

Ha egy testet teljesen a folyadékba merítünk, majd a testet elengedve magára hagyjuk, akkor a felhajtóerő és a nehézségi erő nagyságától függően három eset lehetséges.

$F_{\text{fel}} < F_{\text{neh}}$ $\qquad$ $F_{\text{fel}} = F_{\text{neh}}$ $\qquad$ $F_{\text{fel}} > F_{\text{neh}}$



A három esetnek megfelelően a test elmerül, lebeg vagy felemelkedik a folyadék felszínére. Az összefüggéseket átalakítva:

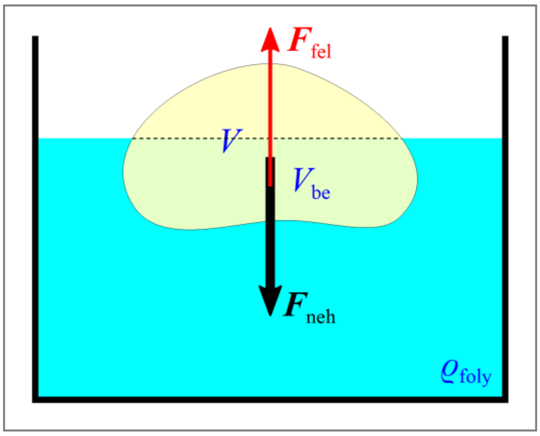
$\varrho_{\text{foly}} \cdot g \cdot V < m \cdot g$ $\qquad$ $\varrho_{\text{foly}} \cdot g \cdot V = m \cdot g$ $\qquad$ $\varrho_{\text{foly}} \cdot g \cdot V > m \cdot g$

$\varrho_{\text{foly}} \cdot g \cdot V < \varrho_{\text{test}} \cdot V \cdot g$ $\qquad$ $\varrho_{\text{foly}} \cdot g \cdot V = \varrho_{\text{test}} \cdot V \cdot g$ $\qquad$ $\varrho_{\text{foly}} \cdot g \cdot V > \varrho_{\text{test}} \cdot V \cdot g$

$\varrho_{\text{foly}} < \varrho_{\text{test}}$ $\qquad$ $\varrho_{\text{foly}} = \varrho_{\text{test}}$ $\qquad$ $\varrho_{\text{foly}} > \varrho_{\text{test}}$

Ezek szerint *a nyugvó folyadékban lévő test elmerül, lebeg vagy felemelkedik a folyadék felszínére attól függően, hogy sűrűsége nagyobb, egyenlő vagy kisebb a folyadék sűrűségénél*. (Ha a test többféle anyagból áll, akkor ϱ_{test} az átlagsűrűséget jelenti.)

Ha a test sűrűsége kisebb a folyadék sűrűségénél, akkor a test a felszínre emelkedik, és egy része a felszín fölé kerül. Eközben a folyadékba merülő rész térfogata csökken, ezért a felhajtóerő is egyre kisebb lesz. A test addig emelkedik, amíg a felhajtóerő egyenlő nem lesz a testre ható nehézségi erővel. Ebben az állapotban a test egyensúlyban van, és úszik a folyadék felszínén. Úszáskor tehát:



$$F_{\text{neh}} = F_{\text{fel}}\,.$$

A felhajtóerő helyére az (1) összefüggés jobb oldalán álló kifejezést beírva:

$$m \cdot g = \varrho_{\text{foly}} \cdot g \cdot V_{\text{be}}\,.$$

A tömeg helyére a test sűrűségének és térfogatának szorzatát írva, majd átrendezve:

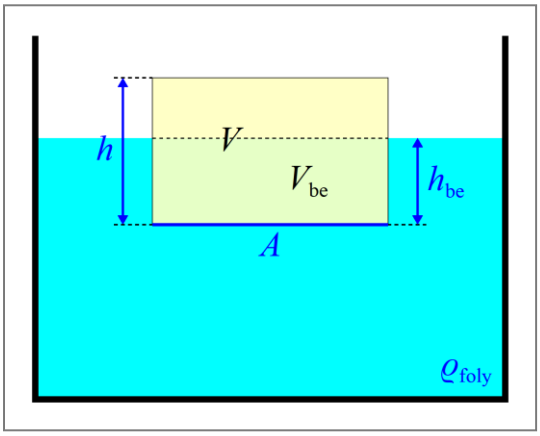
$$\varrho_{\text{test}} \cdot V \cdot g = \varrho_{\text{foly}} \cdot g \cdot V_{\text{be}}\,,$$

$$\varrho_{\text{test}} \cdot V = \varrho_{\text{foly}} \cdot V_{\text{be}}\,,$$

$$\frac{\varrho_{\text{test}}}{\varrho_{\text{foly}}} = \frac{V_{\text{be}}}{V}\,.$$

Eszerint *a nyugvó folyadék felszínén úszó test és a folyadék sűrűségének a hányadosa megegyezik a test folyadékba merülő részének és a teljes térfogatának a hányadosával*.

Speciálisan hasáb alakú testnél a rajz szerinti jelölésekkel:



$$\frac{\varrho_{\text{test}}}{\varrho_{\text{foly}}} = \frac{V_{\text{be}}}{V} = \frac{A \cdot h_{\text{be}}}{A \cdot h} = \frac{h_{\text{be}}}{h}\,,$$

azaz

$$\frac{\varrho_{\text{test}}}{\varrho_{\text{foly}}} = \frac{h_{\text{be}}}{h}\,.$$

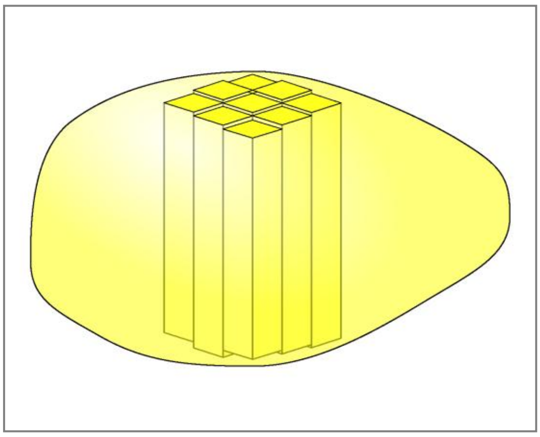
Eszerint *a folyadék felszínén úszó hasábnál a sűrűségek aránya megegyezik a folyadékban lévő rész magasságának és a hasáb teljes magasságának az arányával*.

Kiegészítések

1. *Arkhimédész* (i. e. 287–212) görög fizikus és matematikus i. e. 250. körül fedezte fel a róla elnevezett törvényt. Állítólag ennek a felfedezésnek az örömére hangzott el a híressé vált felkiáltás: Heuréka! (magyarul: megtaláltam!). Az anekdota szerint Arkhimédész fürdés közben jött rá a törvény felfedezésére, és örömében meztelenül rohant végig szülővárosa, Szürakuszai (ma: Siracusa) utcáin.

2. Arkhimédész törvényét Simon *Stevin* (1548–1620) holland fizikus matematikus igazolta 1586-ban elméleti úton.

3. Arkhimédész törvényét, illetve az (1) összefüggést, téglatestre vezettük le, de igazolható, hogy a képlet és a törvény bármilyen testre is érvényes. Gondolatban ugyanis bármely test függőleges síkokkal felosztható téglalap keresztmetszetű hasábokra. Ezekbe a hasábokba beírható egy-egy téglatest. (Az ábrán csak néhány ilyen téglatest látható.) Ezek a téglatestek annál jobban közelítik a hasábokat, minél kisebb a hasábok keresztmetszete. Az egyes téglatestekre ható felhajtóerőket összegezve megkapjuk a téglatestek összességéből álló testre ható felhajtóerőt.



$$F_{\mathrm{fel}} = F_1 + F_2 + F_3 + \ \dots + F_n \,,$$

$$F_{\mathrm{fel}} = \varrho_{\mathrm{foly}} \cdot g \cdot V_1 + \varrho_{\mathrm{foly}} \cdot g \cdot V_2 + \varrho_{\mathrm{foly}} \cdot g \cdot V_3 + \ \dots + \varrho_{\mathrm{foly}} \cdot g \cdot V_n \,,$$

$$F_{\mathrm{fel}} = \varrho_{\mathrm{foly}} \cdot g \cdot (V_1 + V_2 + V_3 + \ \dots + V_n) \,.$$

Ha a testet gondolatban nagyon sok ilyen hasábra osztjuk, akkor a beírt téglatestek össztérfogata határesetben megegyezik az eredeti test térfogatával, ezért

$$F_{\mathrm{fel}} = \varrho_{\mathrm{foly}} \cdot g \cdot V \,.$$

Ha a test úszik, akkor az (1) összefüggésnek megfelelően csak a téglatestek felszín alatti részét kell összegezni. Ezek összege határesetben a test folyadékba merülő részének térfogatát adja, ezért ilyenkor a felhajtóerő nagysága:

$$F_{\mathrm{fel}} = \varrho_{\mathrm{foly}} \cdot g \cdot V_{\mathrm{be}} \,.$$

4. Tudjuk, hogy ha a folyadékra csak a nehézségi erő hat (pl. szabadesésnél, hajításnál, hajtóműveit nem használó űrhajóban), akkor a folyadék súlytalan. A súlytalan folyadékban azonban a hidrosztatikai nyomás nulla, ezért *a súlytalan folyadékban lévő testre nem hat felhajtóerő*. Emiatt például a víz alá nyomott pingponglabda szabadesés közben nem jön fel a felszínre. Ugyanígy a hajtóműveit nem használó űrhajóban egy lebegő vízgömb belsejébe fújt levegőbuborék sem jön „fel” a gömb „tetejére”. (A súlytalanság miatt ilyenkor a „fel” és „teteje” kifejezés is nehezen értelmezhető.) Videó a jelenségről: https://www.youtube.com/watch?v=H_qPWZbxFl8

Képek jegyzéke

Jelmagyarázat:

© **Jogvédett anyag**, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.

W A ***Wikimedia Commons***-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásának megfelelően.