

◀	<i>Tartalom</i>	<i>Fogalmak</i>	<i>Törvények</i>	<i>Képletek</i>	<i>Lexikon</i>	▶
---	-----------------	-----------------	------------------	-----------------	----------------	---

## Bernoulli törvénye

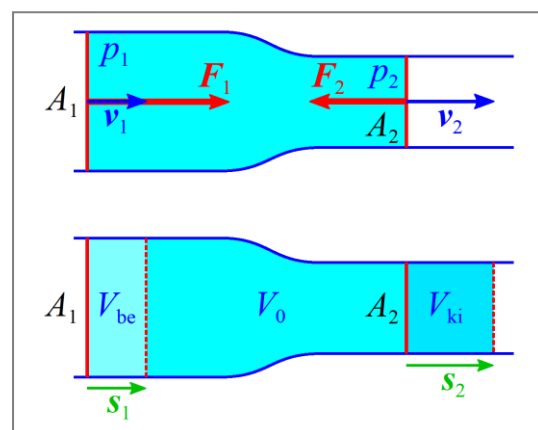
Ha két függőlegesen felfüggesztett papírlap közé fújunk, akkor a lapok egymás felé mozdulnak el. Ha a vízcsapból egyenletesen kifolyó vízszögár mellé cérnára függesztünk egy alufóliából összegyúrt golyócskát, és a golyót a cérnánál fogva a vízszögárba helyezük, akkor a golyó a vízszögárban marad akkor is, ha a cérnaszál nem függőleges. Ez az állapot mindaddig megmarad, amíg a vízcsapot el nem zárjuk. (Videó a kísérletről: <https://youtu.be/z2rjsVvgudM>.) Ezek a jelenségek azzal magyarázhatók, hogy az áramló folyadékban (vagy gázban) a nyomás kisebb, mint a nyugvó közegben.



A jelenséget leíró törvény elméleti úton levezethető. Ehhez vizsgáljuk meg egy vízszintes csőben az összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlását! Az áramlás két különböző helyén a cső keresztmetszetét jelölje  $A_1$  és  $A_2$ , a folyadék nyomását  $p_1$  és  $p_2$ , a sebességének nagyságát pedig  $v_1$  és  $v_2$ ! Az  $A_1$  és  $A_2$  felületek által határolt térrészben található folyadéknak egy rövid  $\Delta t$  időtartam alatt bekövetkező elmozdulására írjuk fel a munkatételt!

$$\Delta E = \Sigma W.$$

Az  $A_1$  és  $A_2$  felületek közti folyadékban csak az  $A_1$  és  $A_2$  felületekre ható  $F_1$  és  $F_2$  nyomóerők végeznek munkát, mert a cső fala által kifejtett nyomóerők nem okoznak elmozdulást. A kezdetben az  $A_1$  és  $A_2$  felületeken elhelyezkedő folyadékreszecskek  $\Delta t$  időtartam alatti elmozdulása  $s_1$  és  $s_2$ . Mivel az  $s_2$  ellentétes az  $F_2$  erővel, ezért a végzett munka:



$$\Sigma W = F_1 \cdot s_1 - F_2 \cdot s_2 = p_1 \cdot A_1 \cdot s_1 - p_2 \cdot A_2 \cdot s_2 = p_1 \cdot V_{be} - p_2 \cdot V_{ki}. \quad (1)$$

Az áramlás stacionárius, ezért a  $V_0$  térfogatban található folyadék  $E_0$  mozgási energiája nem változik meg. A kezdetben az  $A_1$  és  $A_2$  felületek közt található folyadékmennyiség mozgási energiájának megváltozása tehát:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \left( \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 + E_0 \right) - \left( \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + E_0 \right) = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2.$$

Az  $m_1$  és  $m_2$  tömegeket a sűrűség és a térfogat szorzatával kifejezve:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_{ki} \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_{be} \cdot v_1^2 \quad (2)$$

Az (1) és (2) összefüggéseket a munkatételbe helyettesítve:

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_{ki} \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_{be} \cdot v_1^2 = p_1 \cdot V_{be} - p_2 \cdot V_{ki}.$$

A folyadék összenyomhatatlansága miatt a  $V_{be}$  és  $V_{ki}$  térfogatok megegyeznek, ezért a közös térfogattal mindkét oldalt elosztva:

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_1 - p_2.$$

Átrendezve:

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + p_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + p_1.$$

A két helyet a cső mentén bárhol kijelölhetjük. Ebből következik, hogy az összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlásakor az áramlási cső mentén

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + p = \text{állandó}.$$

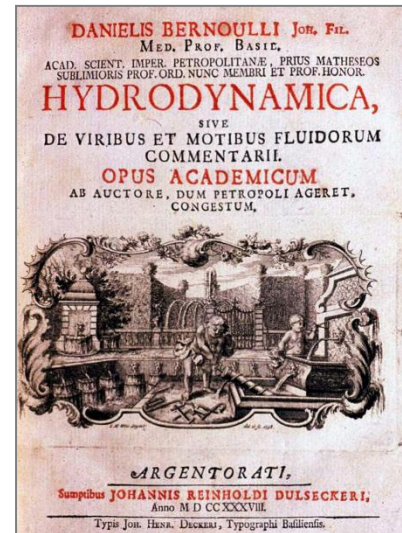
Ezt az összefüggést *Bernoulli törvényének* nevezzük. A Bernoulli-törvény szerint tehát az áramlási csőben a nagyobb sebességű helyeken a nyomás kisebb, mint a kisebb sebességű helyeken.

## Kiegészítések

1. Ha az áramlási cső nem vízszintes, akkor a hidrosztatikai nyomás miatt a Bernoulli-törvény az alábbi alakú. (A  $h$  a vizsgált hely magassága egy választott alapszinttől mérve.)

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h + p = \text{állandó}.$$

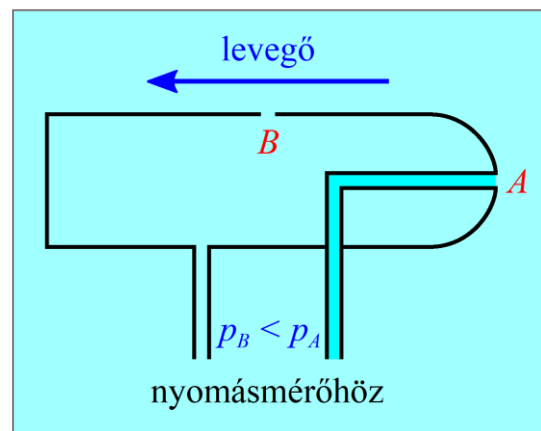
2. Daniel *Bernoulli* (1700–1782) svájci matematikus, fizikus és orvos az 1738-ban megjelent *Hidrodinamika* című művében közölte a később róla elnevezett törvényt. Könyvében részletesen leírta a víz- és szélkerekek, szivattyúk matematikai elméletét is. (A *Bernoulli család* több tagja ért el jelentős eredményeket a matematikában és a természettudományokban. Lásd magyar Wikipédia: [https://hu.wikipedia.org/wiki/Bernoulli\\_család.](https://hu.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_család.))



3. A folytonossági egyenletnek megfelelően az áramlási cső szűkebb szakaszán a sebesség megnő, ezért itt a nyomás csökken. A cső nagyobb keresztmetszetű részén a sebesség kisebb, így a Bernoulli törvényének megfelelően a nyomás növekszik.

4. Bernoulli törvénye a *gázok áramlására* is érvényes, ha a gáz áramlási sebessége, illetve a magasságkülönbség nem túl nagy. Ilyenkor ugyanis a gázok összenyomhatósága még elhanyagolható.

5. A Bernoulli-törvény alapján működik a repülőgépeken, helikoptereken alkalmazott *Pitot-Prandtl-cső*. A cső *A*-val jelzett részénél lefékeződik a levegő, sebessége nulla a géphez viszonyítva. A *B*-vel jelzett nyílásnál a levegő sebessége gyakorlatilag ugyanakkora, mint a gép levegőhöz viszonyított sebessége. A csőhöz kapcsolódó nyomásmérő segítségével az *A* és *B* közötti nyomáskülönbség megmérhető, és ebből a gép sebessége a Bernoulli-törvény alapján meghatározható.

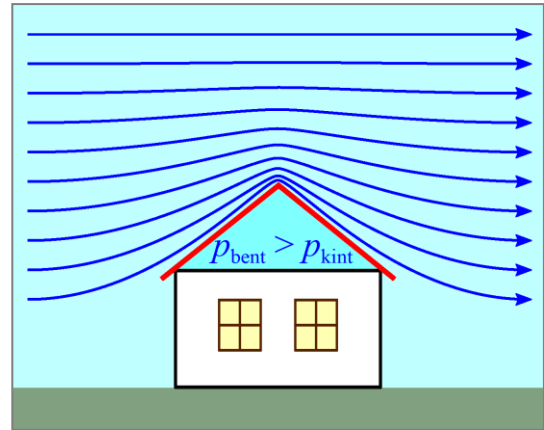


$$p_A = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_B^2 + p_B,$$

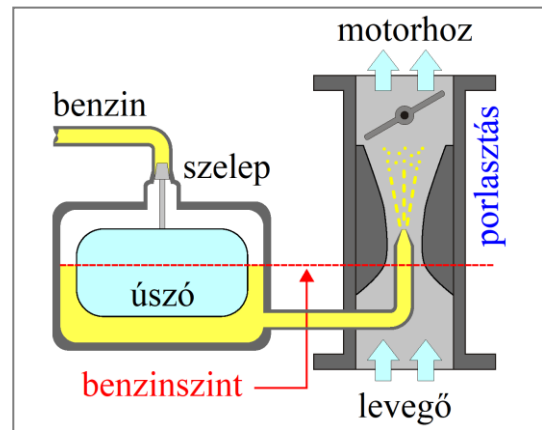
$$v_B = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_A - p_B)}{\rho}}.$$

Nagyobb sebességeknél azonban figyelembe kell venni a levegő összenyomhatóságát is. A gyakorlatban a nyomásmérő skáláján már közvetlenül a mért nyomáshoz tartozó sebesség értékét tüntetik fel. A fenti fényképen egy helikopterre szerelt Pitot–Prandtl-cső látható.

6. Erős szélben a háztetők felett áramló levegőben a nyomás kisebb, mint a padlástér nyugvó levegőjében. A nyomáskülönbségből származó erők a tetőben kárt okozhatnak, sőt a tetőt is letéphetik a házról.



7. Bernoulli törvénye alapján működik a benzinüzemű gépkocsik porlasztója is. A motor által beszívott levegő a porlasztóban nagy sebességgel áramlik, így nyomása lecsökken. A légáramlatba benyúló csőben a benzin felemelkedik, és a cső végénél apró cseppekké szakad. A levegőben a benzin így egyenletesen oszlik szét, emiatt tökéletesebben ég, ezáltal a motor hatásfoka javul. A porlasztót *Bánki Donát* (1859–1922) és *Csonka János* (1852–1939) magyar mérnökök találták fel 1893-ban.



## Képek jegyzéke

	<p><b>Kísérlet a Bernoulli-törvény szemléltetéséhez</b></p> <p>© <a href="http://fizkapu.hu/fizfoto/fotok/fizf0996.jpg">http://fizkapu.hu/fizfoto/fotok/fizf0996.jpg</a></p> <p>Videó a kísérletről:</p> <p>© <a href="https://youtu.be/z2rjsVvgudM">https://youtu.be/z2rjsVvgudM</a></p>
	<p><b>Rajz a Bernoulli-törvény levezetéséhez</b></p> <p>© <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0221.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0221.svg</a></p>
	<p><b>Daniel Bernoulli: Hidrodinamika című könyve</b></p> <p>W <a href="https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HYDRODYNAMICA,_Daniels_Bernoulli.png">https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HYDRODYNAMICA,_Daniels_Bernoulli.png</a></p>
	<p><b>A Pitot–Prandtl-cső elve</b></p> <p>© <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0222.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0222.svg</a></p>
	<p><b>Pitot–Prandtl-cső helikopteren</b></p> <p>W <a href="https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pitot-cső_helikopteren_4.jpg">https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pitot-cső_helikopteren_4.jpg</a></p>
	<p><b>Szél a padlástér felett</b></p> <p>© <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0223.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0223.svg</a></p>
	<p><b>A porlasztó elvi rajza</b></p> <p>© <a href="http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0224.svg">http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0224.svg</a></p> <p>Átdolgozás ebből:</p> <p>W <a href="https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carburetor_Gaznik_SVG.svg">https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carburetor_Gaznik_SVG.svg</a></p>

### Jelmagyarázat:

© **Jogvédtett anyag**, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.

W A **Wikimedia Commons**-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásának megfelelően.

◀	<a href="#">Tartalom</a>	<a href="#">Fogalmak</a>	<a href="#">Törvények</a>	<a href="#">Képletek</a>	<a href="#">Lexikon</a>	▶
---	--------------------------	--------------------------	---------------------------	--------------------------	-------------------------	---