Rezgések összegzése és felbontása

Láttuk, hogy a harmonikus rezgőmozgás akkor alakulhat ki, ha a pontszerű testre periodikus erő hat. Előfordulhat, hogy a testre egyidejűleg két (vagy több), időben periodikusan változó erő hat. Ilyenkor a test általában rendkívül bonyolult mozgást végez, egyes esetekben a mozgás nem is periodikus. A továbbiakban ezért csak néhány olyan egyszerűbb esetet vizsgálunk meg, amelyek a későbbiekben fontosak lesznek. (Az egyes eseteket pontokba foglaltuk, hogy könnyebben lehessen áttekinteni, rendszerezni őket.)

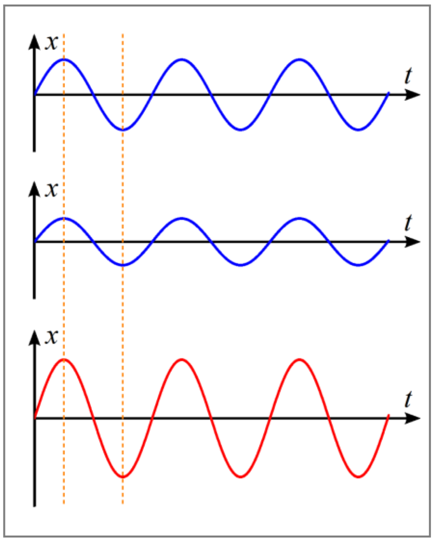
Egyirányú rezgések

A két erő, illetve a hatásukra létrejövő elmozdulások közös egyenesbe esnek.

A.1. Ha a két harmonikus rezgés *frekvenciája megegyezik*, akkor az eredő rezgés egy ugyanakkora frekvenciájú harmonikus rezgés lesz. Az eredő rezgés amplitúdóját azonban a két rezgés amplitúdója mellett a két összetevő egymáshoz viszonyított fázisa (helyzete) is befolyásolja.

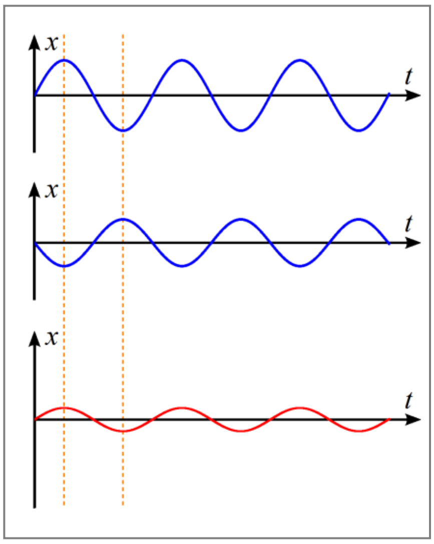
A.1.1. Ha a két rezgés *ugyanakkora frekvenciájú*, és *azonos fázisú*, azaz a két rezgés ugyanolyan irányú maximális kitérései egyidejűleg következnek be, akkor a *két rezgés erősíti egymás hatását*. Az eredő rezgés amplitúdója ilyenkor megegyezik a két összetevő amplitúdójának összegével, azaz

$$A = A_1 + A_2 \,.$$

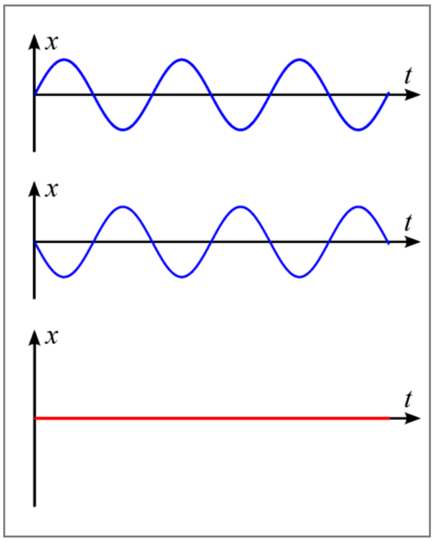


A.1.2. Ha a két rezgés *ugyanakkora frekvenciájú*, de *ellentétes fázisú*, azaz a két rezgés ellentétes irányú maximális kitérései egyidejűleg következnek be, akkor a *két rezgés gyengíti egymás hatását*. Az eredő rezgés amplitúdója ilyenkor megegyezik a két amplitúdó különbségének abszolút értékével, azaz

$$A = |A_1 - A_2| \,.$$



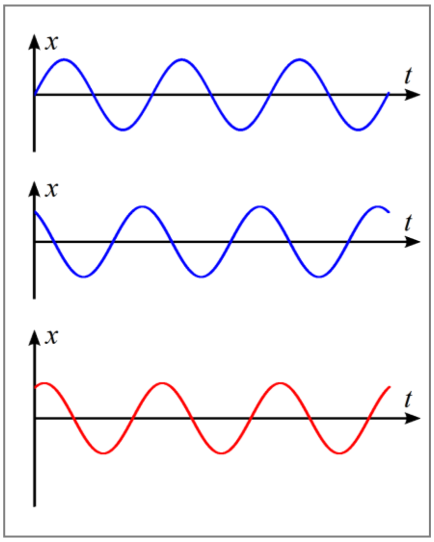
A.1.2.a Speciálisan, *ha a két rezgés ugyanakkora frekvenciájú, ellentétes fázisú és amplitúdójuk is ugyanakkora, akkor a két rezgés kioltja egymást.* Ilyenkor ugyanis a testre ható erők eredője minden pillanatban nulla, ezért a test nyugalomba marad.



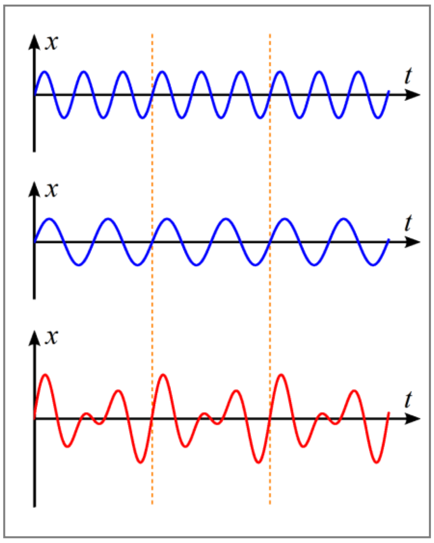
A.1.3. Tetszőleges, az előzőektől különböző fázisviszonyoknál az eredő amplitúdó valamilyen közbülső értéket vesz fel, azaz

$$0 < A < A_1 + A_2 \,.$$

A rajzon két azonos amplitúdójú rezgés, és összegük látható, a két összetevő rezgés között 120°-os, azaz 1/3 periódusnak megfelelő fáziskülönbség van.

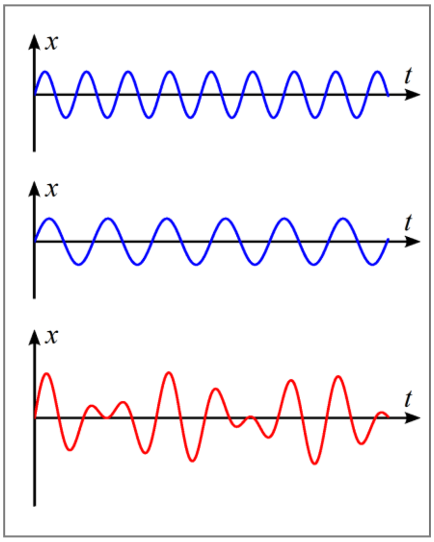


A.2. Ha a két harmonikus rezgés eltérő frekvenciájú, de *a frekvenciák aránya racionális szám*, akkor a két rezgés eredője periodikus rezgés lesz, de az eredő rezgés ilyenkor nem harmonikus.



A rajzon látható két rezgés frekvenciáinak aránya 1,5.

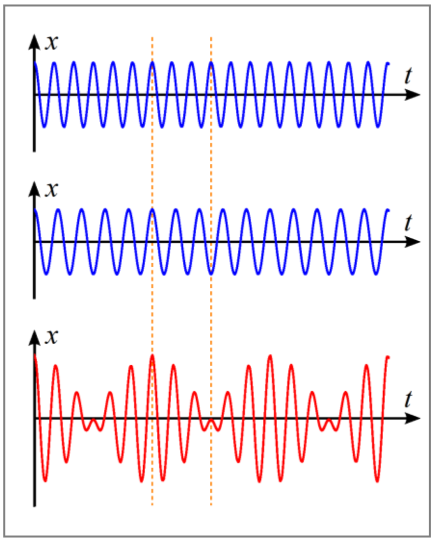
A.3. Ha a *két harmonikus rezgés frekvenciájának aránya irracionális szám*, akkor a két rezgés eredője nem lesz periodikus, és így csak tágabb értelemben tekinthető rezgésnek.



A rajzon látható két rezgés frekvenciáinak aránya $\sqrt{2}$.

A.4. Ha a két harmonikus rezgés frekvenciája közel esik egymáshoz, akkor *olyan eredő rezgés alakul ki, amelynek amplitúdója periodikusan változik*. Ezt a jelenséget *lebegésnek* nevezzük. A rajzról is leolvasható, és kísérletekkel is ellenőrizhető, hogy a lebegés (azaz az amplitúdóváltozás) frekvenciája megegyezik a két frekvencia különbségével. Ha például $f_1 > f_2$, akkor

$$f_{\text{lebeg}} = f_1 - f_2 \,.$$

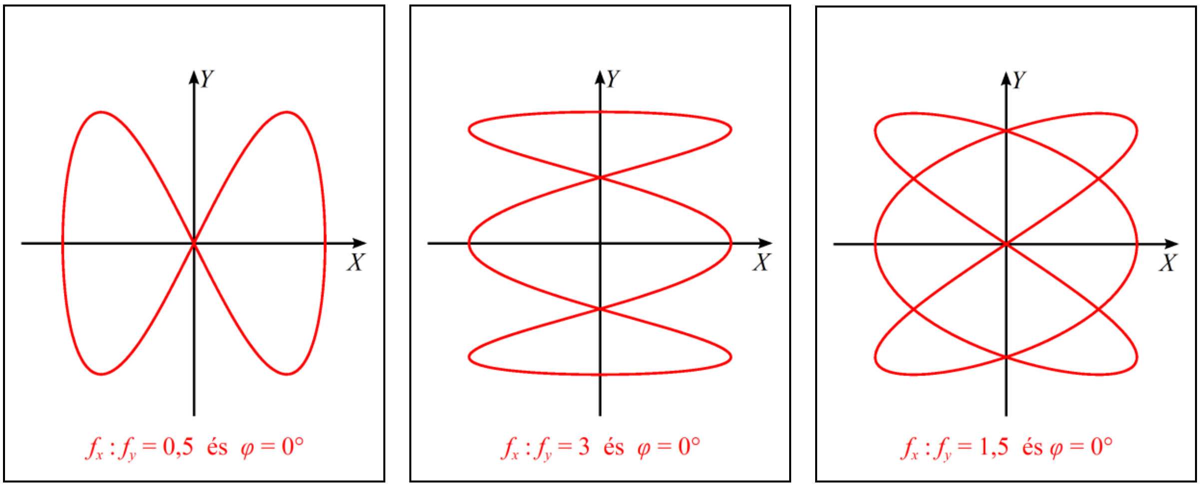


A rajzon látható rezgések frekvenciája 6 Hz és 5 Hz, ezért a lebegés frekvenciája 1 Hz.

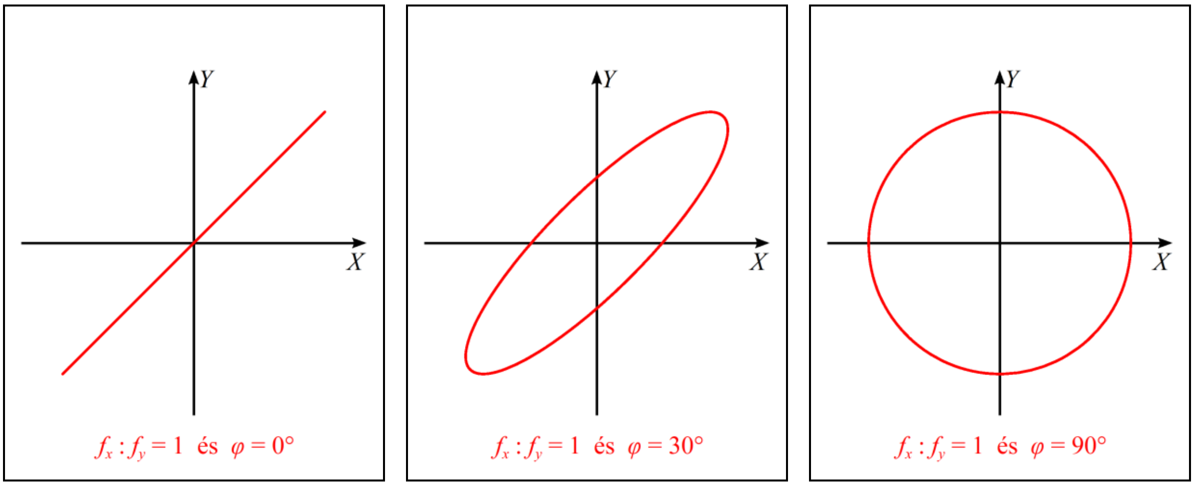
Merőleges rezgések

A két erő, illetve a hatásukra létrejövő elmozdulások egymásra merőlegesek. Az ilyenkor létrejövő mozgás többnyire bonyolult alakú pályáját *Lissajous-görbének* nevezzük.

B.1. Ha a frekvenciák aránya *racionális szám*, akkor a Lissajous-görbe önmagába záródik. A rajzon látható görbéknél a frekvenciák aránya rendre 0,5; 3 és 1,5.

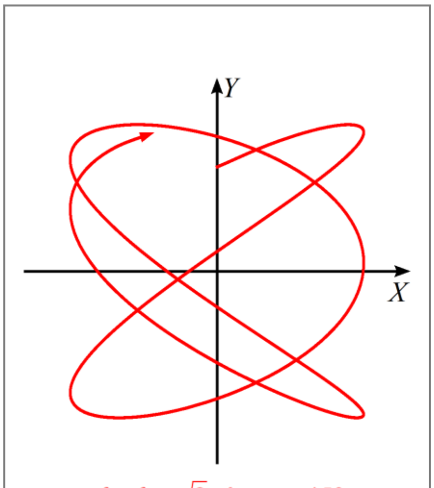


B.1.1. Speciális esetként *az egyenletes körmozgás is előállítható Lissajous-görbeként*. Ekkor a két összetevő amplitúdói és frekvenciái megegyeznek, de az egyik rezgés 90°-kal, azaz 1/4 periódussal késik a másikhoz képest.



B.2. Ha a frekvenciák aránya *irracionális szám*, akkor a Lissajous-görbe *nem záródik*. A mozgás (az A.3. esethez hasonlóan) ilyenkor nem periodikus mozgás.

A rajzon látható rezgések frekvenciájának aránya $\sqrt{2}$. (A $\sqrt{2} \approx 1{,}414$, ez közel van a B.1. pontban látható harmadik eset 1,5 értékéhez. Emiatt a Lissajous-görbe itt ábrázolt szakasza hasonlít a B.1. pont harmadik görbéjéhez, de attól eltérően most nem tér vissza önmagába.)



$f_x : f_y = \sqrt{2}$ és $\varphi = 45°$

Rezgések felbontása

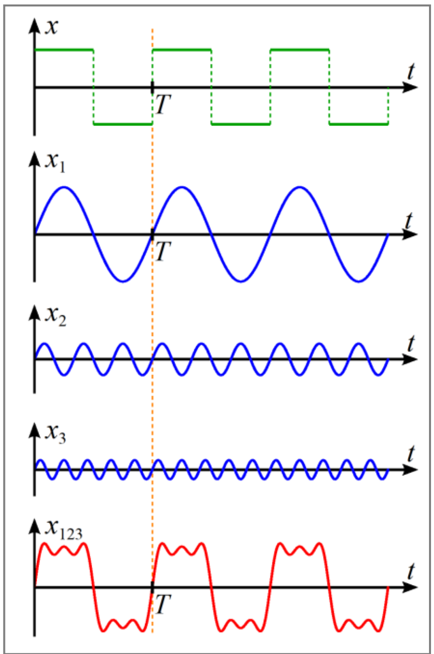
A *rezgések felbontása (analízise)* az összegzéssel ellentétes folyamat. Ilyenkor azt kell meghatározni, hogy *egy adott periodikus rezgés milyen harmonikus rezgések összegzésével állítható elő.*

A probléma a *Fourier-tétel* segítségével oldható meg, amely szerint *minden periodikus rezgés egyértelműen felbontható olyan harmonikus rezgések összegére, amelyek frekvenciái a felbontandó rezgés frekvenciájának pozitív egész számú többszörösei.* Képlettel:

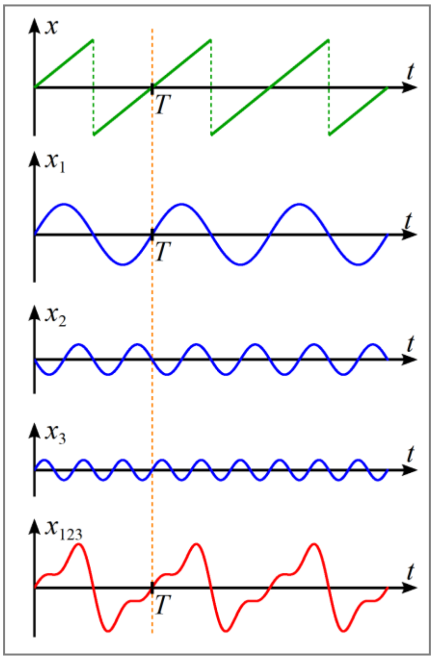
$$x(t) = A_0 + \underbrace{A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)}_{\text{alaprezgés}} + \underbrace{A_2 \cdot \sin(2\omega t + \varphi_2)}_{\text{1.felharmonikus}} + \underbrace{A_3 \cdot \sin(3\omega t + \varphi_3)}_{\text{2.felharmonikus}} + \ldots$$

A felbontásban szereplő, az $A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$ képlettel megadható összetevőt *alaprezgés*nek, a továbbiakat *felharmonikus*oknak, az összetevők együttesét a *rezgés spektrumának* nevezzük.

A Fourier-felbontásban végtelen sok tag is szerepelhet, de általában már az első néhány összege is jól közelíti a vizsgált rezgést. A rajzon látható *négyszögrezgést* például már az első három tag összege is jól megközelíti. (A rajzon a zöld görbe az eredeti négyszögrezgés kitérés–idő grafikonja, a három kék az alaprezgés és két felharmonikus grafikonja, a piros pedig ennek a három összetevőnek az összege.)



A *fűrészfogrezgés szintén jól közelíthető* az első három tag összegével. (A rajzon a zöld görbe az eredeti fűrészfogrezgés kitérés–idő grafikonja, a három kék az alaprezgés és két felharmonikus grafikonja, a piros pedig ennek a három összetevőnek az összege.)



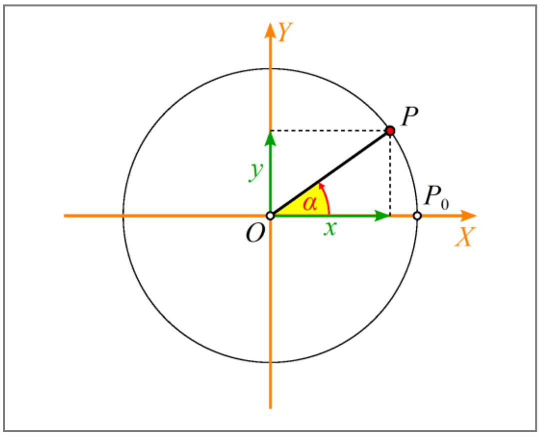
Kiegészítések

1. Jules Antoine *Lissajous* (1822–1880) francia fizikus 1855-ben szerkesztett eszközt az egymásra merőleges rezgések összegzésének tanulmányozására. Az általa rajzolt görbéket az ő tiszteletére nevezik Lissajous-görbéknek.

2. A B.1.1. pontban láttuk, hogy az *egyenletes körmozgás* Lissajous-görbeként is előállítható. Ennek igazolásához írjuk fel *a két rezgés kitérését* (az O egyensúlyi helyzettől mért elmozdulásokat) az idő függvényeként:

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + 90°)$$

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad (1)$$



Az első összefüggést átalakítva:

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + 90°) = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

A két elmozdulás egymásra merőleges, ezért az egyensúlyi helyzettől mért $\overrightarrow{OP}$ elmozdulás nagysága a Pitagorasz-tétel alapján:

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{[A \cdot \cos(\omega \cdot t)]^2 + [A \cdot \sin(\omega \cdot t)]^2}\,.$$

Négyzetreemelés, az A^2 kiemelése és rendezés után:

$$\overline{OP} = \sqrt{A^2 \cdot [\sin^2(\omega \cdot t) + \cos^2(\omega \cdot t)]} = \sqrt{A^2 \cdot 1} = A = \text{állandó}$$

Eszerint a pálya bármely P pontja mindig állandó A távolságra van az O egyensúlyi helyzettől, azaz *a test egy olyan körpályán mozog, amelynek sugara megegyezik a két rezgés amplitúdójával*.

A rajz alapján $y = \overline{OP} \cdot \sin\alpha = A \cdot \sin\alpha$. Ezt az (1) összefüggéssel összehasonlítva:

$$\left.\begin{aligned} y &= A \cdot \sin\alpha \\ y &= A \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \omega \cdot t$$

Ennek alapján a körmozgás szögsebessége:

$$\omega_{\text{kör}} = \frac{\alpha}{t} = \frac{\omega \cdot t}{t} = \omega = \text{állandó.}$$

Eszerint *a körmozgás szögsebessége állandó*, *azaz a körmozgás egyenletes körmozgás*.

3. *Az analízis* görög eredetű szó, jelentése elemzés.

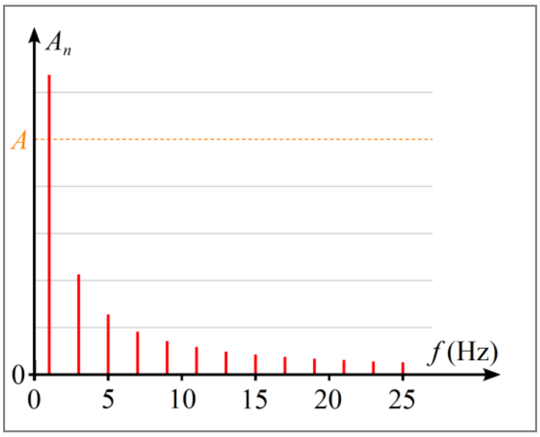
4. Jean-Baptiste Joseph *Fourier* (1768–1830) francia matematikus, fizikus az elméleti fizika egyik megalapítója volt. Egy hővezetési probléma megoldása során ismerte fel a róla elnevezett tételt, amelyet az 1822-ben megjelent *A hő analitikai elmélete* című könyvében közölt először. Fourier-t 1823-ban a *Royal Society*, 1826-ban a *Francia Akadémia* is tagjává választotta.

5. A korábbi rajzon látható *négyszögrezgés* Fourier-felbontása:

$$x(t) = \frac{4 \cdot A}{\pi} \cdot \left(\sin(\omega \cdot t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5 \cdot \omega \cdot t) + \ldots\right)$$

A képletben az A az eredeti négyszögrezgés amplitúdóját jelöli.

Ha az 1 Hz frekvenciájú négyszögrezgés spektrumában előforduló első 25 összetevő amplitúdóját a frekvencia függvényeként ábrázoljuk, ezt a grafikont kapjuk. A képlet és a rajz alapján is látható, hogy a felbontásban ténylegesen *csak a páratlan sorszámú összetevők szerepelnek*, a páros sorszámúak amplitúdója nulla.

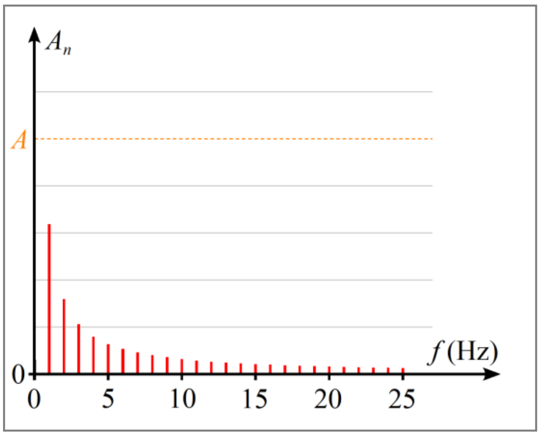


A *fűrészfogrezgés* Fourier-felbontása:

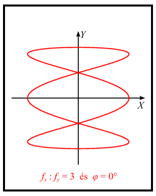
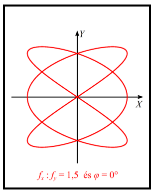
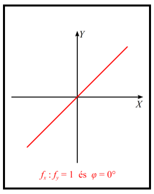
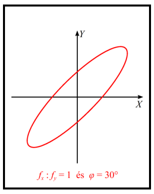
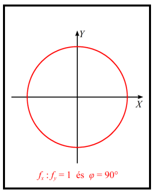
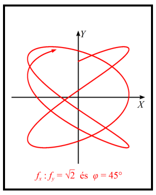
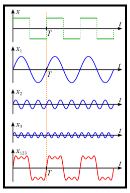
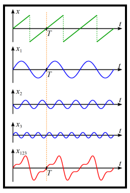
$$x(t) = \frac{2 \cdot A}{\pi} \cdot \left(\sin(\omega \cdot t) - \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t) \mp \ldots \right)$$

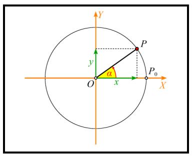
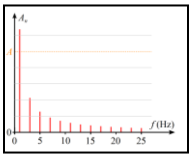
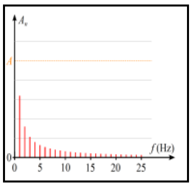
A képletben az A az eredeti fűrészfogrezgés amplitúdóját jelöli.

Ha az 1 Hz frekvenciájú fűrészfogrezgés spektrumában előforduló első 25 összetevő amplitúdóját a frekvencia függvényeként ábrázoljuk, ezt a grafikont kapjuk. A képletből látszik, és a rajzon is megfigyelhető, hogy itt *minden felharmonikus szerepel* a felbontásban.



Képek jegyzéke

	**Lissajous-görbe** ($f_x : f_y = 3$ és $\varphi = 0°$) © http://fizikakonyv.hu/rajzok/0331.svg
	**Lissajous-görbe** ($f_x : f_y = 1{,}5$ és $\varphi = 0°$) © http://fizikakonyv.hu/rajzok/0332.svg
	**Lissajous-görbe** ($f_x : f_y = 1$ és $\varphi = 0°$) © http://fizikakonyv.hu/rajzok/0333.svg
	**Lissajous-görbe – ellipszis** ($f_x : f_y = 1$ és $\varphi = 30°$) © http://fizikakonyv.hu/rajzok/0334.svg
	**Lissajous-görbe – kör** ($f_x : f_y = 1$ és $\varphi = 90°$) © http://fizikakonyv.hu/rajzok/0335.svg
	**Lissajous-görbe** ($f_x : f_y = \sqrt{2}$ és $\varphi = 45°$) © http://fizikakonyv.hu/rajzok/0336.svg
	**Négyszögrezgés felbontása** © http://fizikakonyv.hu/rajzok/0337.svg
	**Fűrészfogrezgés felbontása** © http://fizikakonyv.hu/rajzok/0338.svg
	**Fourier arcképe** W https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fourier.jpg

	**Rajz a körmozgás Lissajous-görbeként történő származtatásához** © http://fizikakonyv.hu/rajzok/0339.svg
	**Négyszögrezgés összetevőinek amplitúdói** © http://fizikakonyv.hu/rajzok/0340.svg
	**Fűrészfogrezgés összetevőinek amplitúdói** © http://fizikakonyv.hu/rajzok/0341.svg

Jelmagyarázat:

© **Jogvédett anyag**, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.

W A ***Wikimedia Commons***-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásának megfelelően.