

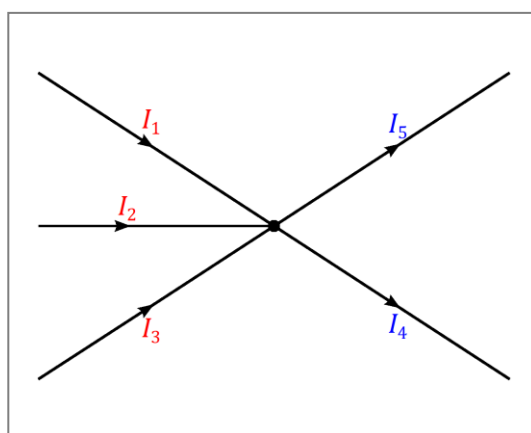
◀	Tartalom	Fogalmak	Törvények	Képletek	Lexikon	▶
---	----------	----------	-----------	----------	---------	---

Kirchhoff törvényei

Tapasztalatok szerint bármely áramkörben a vezetékben folyó áramok erősségei összefüggnek egymással. Ugyancsak kapcsolat van az áramforrások és a fogyasztók feszültségei között. Határozzuk meg ezeket az általános összefüggéseket!

A csomóponti törvény

Egy fogyasztókból és áramforrásokból felépített hálózat egyik *csomópontjában* megmértük az oda befolyó, illetve az onnan kifolyó áramok erősségét. A mérések eredményét táblázatba foglaltuk.



Befolyó áramok			Kifolyó áramok	
I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
0,3 A	0,4 A	0,5 A	0,5 A	0,7 A
1,2 A			1,2 A	

Látható, hogy a csomópontba befolyó, illetve az onnan kifolyó áramok erősségének összege egyaránt 1,2 A.

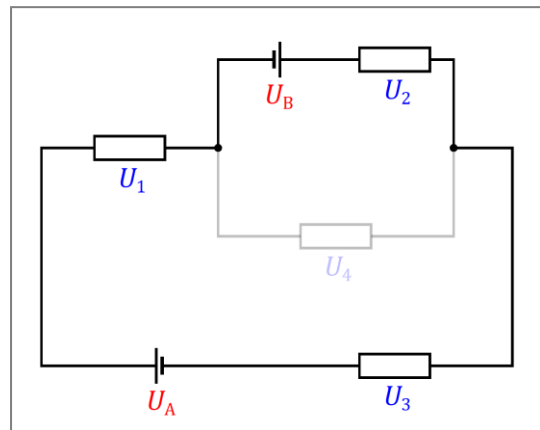
További hasonló mérések és elméleti megfontolások is azt igazolják, hogy *fogyasztókból és áramforrásokból felépített hálózat bármely csomópontjában a befolyó áramok erősségének összege ugyanakkora, mint az onnan kifolyó áramok erősségének összege.*
Képlettel:

$$\Sigma I_{be} = \Sigma I_{ki}$$

Ezt az összefüggést *Kirchhoff I. törvényének (vagy csomóponti törvénynek)* nevezzük.

A huroktörvény

Egy fogyasztókból és áramforrásokból felépített hálózatban egy zárt hurok mentén haladva megmértük az egyes fogyasztók kivezetései közt levő feszültségeket, illetve a hurokban található áramforrások feszültségét. A mérési eredmények az alábbi táblázatban láthatók:



Fogyasztók			Áramforrások	
U_1	U_2	U_3	U_A	U_B
4,5 V	4,5 V	3 V	9 V	3 V
12 V			12 V	

Látható, hogy a hurokban az egyes fogyasztókon mérhető feszültségek összege, illetve az áramforrások feszültségének összege egyaránt 12 V.

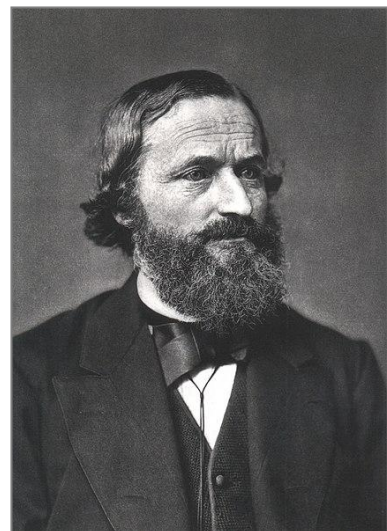
További hasonló mérések, illetve elméleti megfontolások is azt igazolják, hogy *fogyasztókból és áramforrásokból összeállított hálózatban bármely zárt hurok mentén körbehaladva, az egyes fogyasztókon mérhető feszültségek előjeles összege ugyanakkora, mint az áramforrások feszültségének előjeles összege.* Képlettel:

$$\Sigma U_{\text{fogyasztó}} = \Sigma U_{\text{áramforrás}}$$

Ezt az összefüggést *Kirchhoff II. törvényének* (vagy *huroktörvénynek*) nevezzük.

Kiegészítések

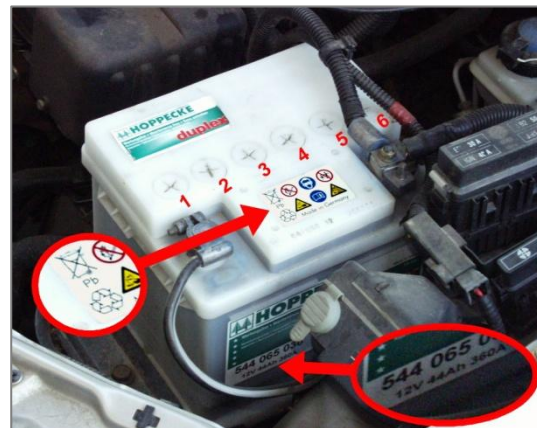
1. A csomóponti törvényt és a huroktörvényt Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887) német fizikus fogalmazta meg 1845-ben. Kirchhoff 1872-től a Magyar Tudományos Akadémia tiszteleti tagja volt. (Ebben az időben az Akadémia főtitkára Arany János volt.)



2. Egyes eszközökben egyetlen, általában 1,5 V feszültségű elem nem tud elegendő feszültséget biztosítani a működéshez. Ilyenkor *több elemet sorosan kapcsolva* biztosítható a fogyasztó működése. Kirchhoff huroktörvénye szerint ugyanis például négy darab 1,5 V feszültségű elemet sorosan kapcsolva a fogyasztón lévő feszültség ugyanakkora lesz, mint az áramkörben található áramforrások feszültségének összege, azaz a példában 6 V. A képen látható fényképezőgép például 4 darab 1,2 V feszültségű akkumulátorral működik, melyek így 4,8 V feszültséget biztosítanak a gép működéséhez.

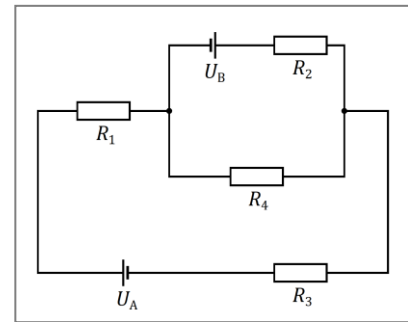


3. Az olyan áramforrásokat, amelyek egymással összekapcsolt, közös tokba szerelt elemeket (vagy akkumulátorcellákat) tartalmaznak, *telepeknek* nevezzük. Ilyen telep például a zsebtelep, melyben három darab sorosan kapcsolt 1,5 V-os elem állít elő 4,5 V feszültséget. A hasáb alakú, a köznyelvben „9 V-os elem” elnevezéssel ismert telepben általában 6 darab 1,5 V-os elem van sorba kapcsolva. A gépkocsik akkumulátorai valójában szintén telepek. A személygépkocsikban többnyire 6 darab sorosan kapcsolt, 2 V feszültségű akkumulátorokból álló telep szolgáltatja az autó elektromos rendszereihez szükséges 12 V feszültséget.



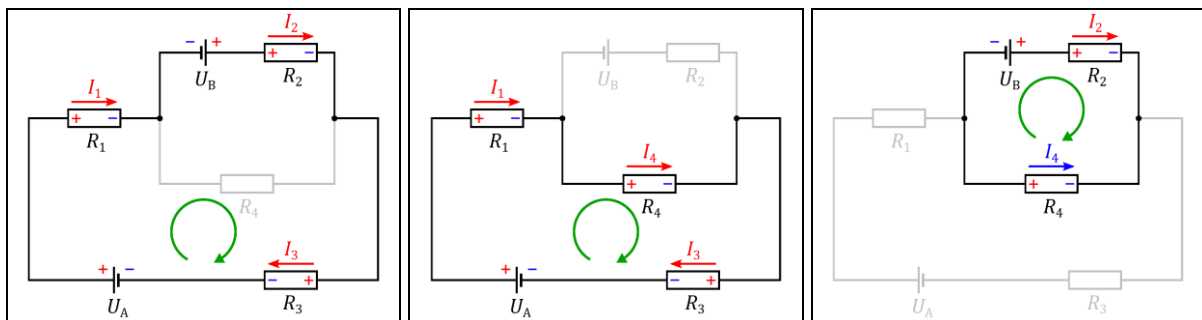
Példa

A kapcsolási rajzon látható áramkörben $R_1 = 225 \Omega$, $R_2 = 450 \Omega$, $R_3 = 150 \Omega$ és $R_4 = 150 \Omega$. Az áramforrások feszültsége $U_A = 9 \text{ V}$ és $U_B = 3 \text{ V}$. Mekkora erősségű áram folyik keresztül az egyes ellenállásokon.



Megoldás:

A Kirchhoff-törvények alkalmazásával a probléma megoldható. (A továbbiakban az R_i ellenálláson átfolyó áram erősségét I_i -vel, az ellenállás kivezetésein lévő feszültséget U_i -vel jelöljük.) Elsőként írjuk fel a *huroktörvényt* az alábbi ábrákon bejelölt három hurokra! (Az ellenállások polaritása és az áramirány csak feltételezés. Ha a megoldás során valamelyikre negatív értéket kapnánk, akkor az azt jelentené, hogy a feltételezésünk hibás volt, a polaritás és áramirány éppen ellentétes a feltételezettel.)



$$U_1 + U_2 + U_3 = U_A + U_B,$$

$$U_1 + U_4 + U_3 = U_A,$$

$$U_2 - U_4 = U_B.$$

(A harmadik egyenlet felírásakor figyelembe vettük, hogy az U_4 feszültség feltételezett polaritása, és ezzel együtt a feltételezett áramirány ellentétes a választott körüljárási iránnyal.) Ez a három egyenlet azonban nem független egymástól. Ugyanis például a harmadikhoz úgy is eljuthatunk, hogy az elsőből kivonjuk a másodikat. Emiatt a továbbiakban csak az első két egyenletet használjuk.

Az ellenállás definíciója alapján a feszültség kifejezhető:

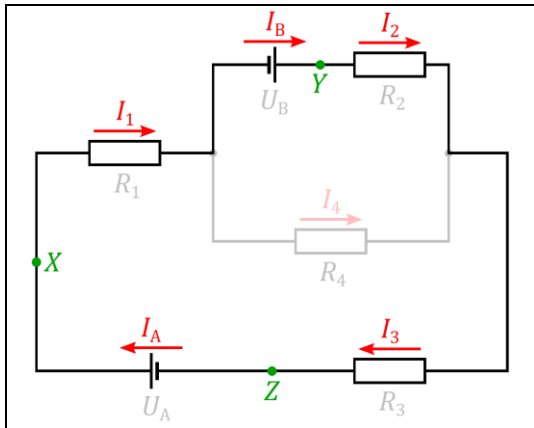
$$U_i = I_i \cdot R_i.$$

Ennek alapján az első két egyenletet átalakítva:

$$I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 = U_A + U_B, \quad (1)$$

$$I_1 \cdot R_1 + I_4 \cdot R_4 + I_3 \cdot R_3 = U_A. \quad (2)$$

Ebből az egyenletrendszerből a négy ismeretlen áramerősség nem számítható ki. Az alábbi ábrákon bejelölt csomópontokra azonban a csomóponti törvény alapján további egyenletek írhatók fel.



Az X, Y és Z csomópontoknál:

$$I_A = I_1, \quad (3)$$

$$I_B = I_2, \quad (4)$$

$$I_3 = I_A. \quad (5)$$

Az (5) és (3) egyenlet alapján:

$$I_3 = I_A = I_1 \quad (6)$$

Ezeket az (1) és (2) egyenletekbe behelyettesítve:

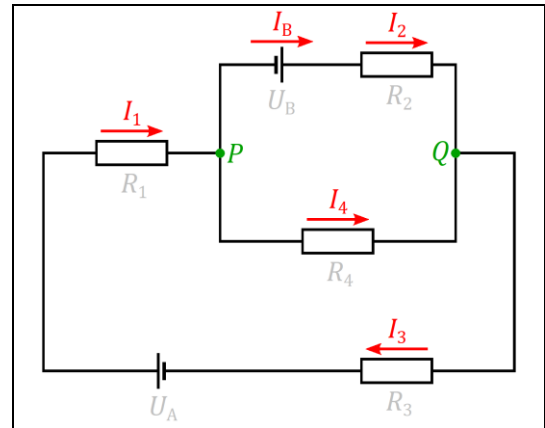
$$I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 + I_1 \cdot R_3 = U_A + U_B,$$

$$I_1 \cdot R_1 + (I_1 - I_2) \cdot R_4 + I_1 \cdot R_3 = U_A.$$

Ebben az egyenletrendszerben csak két ismeretlen (I_1 és I_2) van, így megoldható. A második egyenletben a beszorzást elvégezve:

$$I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 + I_1 \cdot R_3 = U_A + U_B,$$

$$I_1 \cdot R_1 + I_1 \cdot R_4 - I_2 \cdot R_4 + I_1 \cdot R_3 = U_A.$$



A P és Q csomópontoknál:

$$I_1 = I_B + I_4, \quad (7)$$

$$I_2 + I_4 = I_3.$$

A (7) és (4) egyenlet alapján:

$$I_1 = I_2 + I_4,$$

$$I_4 = I_1 - I_2. \quad (8)$$

Az I_1 tényezőt mindkét egyenletben kiemelve:

$$I_1 \cdot (R_1 + R_3) + I_2 \cdot R_2 = U_A + U_B, \quad (9)$$

$$I_1 \cdot (R_1 + R_4 + R_3) - I_2 \cdot R_4 = U_A.$$

Az első egyenletet R_4 -gyel, a másodikat R_2 -vel szorozva:

$$I_1 \cdot (R_1 + R_3) \cdot R_4 + I_2 \cdot R_2 \cdot R_4 = (U_A + U_B) \cdot R_4,$$

$$I_1 \cdot (R_1 + R_4 + R_3) \cdot R_2 - I_2 \cdot R_2 \cdot R_4 = U_A \cdot R_2.$$

A két egyenletet összeadva az I_2 -t tartalmazó tagok kiesnek, ezért csak egyetlen ismeretlen marad, amely az egyenletből kifejezhető:

$$I_1 \cdot (R_1 + R_3) \cdot R_4 + I_1 \cdot (R_1 + R_4 + R_3) \cdot R_2 = (U_A + U_B) \cdot R_4 + U_A \cdot R_2,$$

$$I_1 \cdot [(R_1 + R_3) \cdot R_4 + (R_1 + R_4 + R_3) \cdot R_2] = (U_A + U_B) \cdot R_4 + U_A \cdot R_2,$$

$$I_1 = \frac{(U_A + U_B) \cdot R_4 + U_A \cdot R_2}{(R_1 + R_3) \cdot R_4 + (R_1 + R_4 + R_3) \cdot R_2}.$$

Az ismert adatokat behelyettesítve:

$$I_1 = \frac{(9 \text{ V} + 3 \text{ V}) \cdot 150 \, \Omega + 9 \text{ V} \cdot 450 \, \Omega}{(225 \, \Omega + 150 \, \Omega) \cdot 150 \, \Omega + (225 \, \Omega + 150 \, \Omega + 150 \, \Omega) \cdot 450 \, \Omega} = 0,02 \text{ A}.$$

A (9) egyenlet alapján az I_2 is meghatározható:

$$I_1 \cdot (R_1 + R_3) + I_2 \cdot R_2 = U_A + U_B,$$

$$I_2 = \frac{U_A + U_B - I_1 \cdot (R_1 + R_3)}{R_2}.$$

Behelyettesítve:

$$I_2 = \frac{9 \text{ V} + 3 \text{ V} - 0,02 \text{ A} \cdot (225 \, \Omega + 150 \, \Omega)}{450 \, \Omega} = 0,01 \text{ A}.$$

A (6) és (8) egyenletek alapján az I_3 és az I_4 is meghatározható:

$$I_3 = I_1 = 0,02 \text{ A},$$

$$I_4 = I_1 - I_2 = 0,02 \text{ A} - 0,01 \text{ A} = 0,01 \text{ A}.$$

Megjegyzés:

Az áramerősségek és ellenállások ismeretében, az $U_i = I_i \cdot R_i$ összefüggés alapján a feszültségek is kiszámíthatók.

Képek jegyzéke

	<p>Rajz a csomóponti törvényhez © http://fizikakonyv.hu/rajzok/0450.svg</p>
	<p>Rajz a huroktörvényhez © http://fizikakonyv.hu/rajzok/0451.svg</p>
	<p>Kirchhoff arcképe W https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gustav_Robert_Kirchhoff.jpg</p>
	<p>Fényképezőgép nyitott elemtartója sorosan kapcsolt akkumulátorokkal © http://fizkapu.hu/fizfoto/fotok/fizf1028.jpg</p>
	<p>Szétcszedett zsebtelep sorosan kapcsolt elemei © http://fizkapu.hu/fizfoto/fotok/fizf1030.jpg</p>
	<p>Gépkocsi akkumulátor © http://fizkapu.hu/fizfoto/fotok/fizf0707.jpg</p>
	<p>Rajz a példához (1) © http://fizikakonyv.hu/rajzok/0452.svg</p>
	<p>Rajz a példához (2) © http://fizikakonyv.hu/rajzok/0453.svg</p>

	<p>Rajz a példához (3) © http://fizikakonyv.hu/rajzok/0454.svg</p>
	<p>Rajz a példához (4) © http://fizikakonyv.hu/rajzok/0455.svg</p>
	<p>Rajz a példához (5) © http://fizikakonyv.hu/rajzok/0456.svg</p>
	<p>Rajz a példához (6) © http://fizikakonyv.hu/rajzok/0457.svg</p>

Jelmagyarázat:

© **Jogvéde**tt anyag, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.

W A **Wikimedia Commons**-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásának megfelelően.