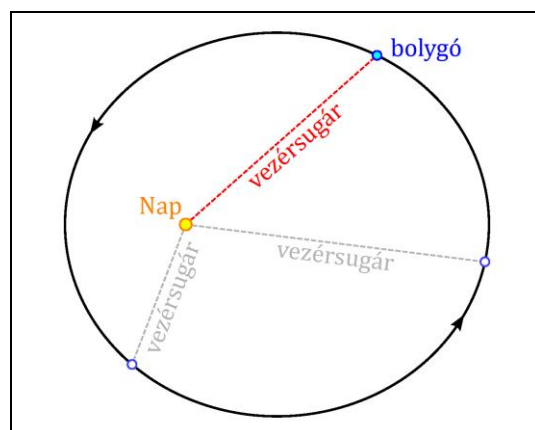
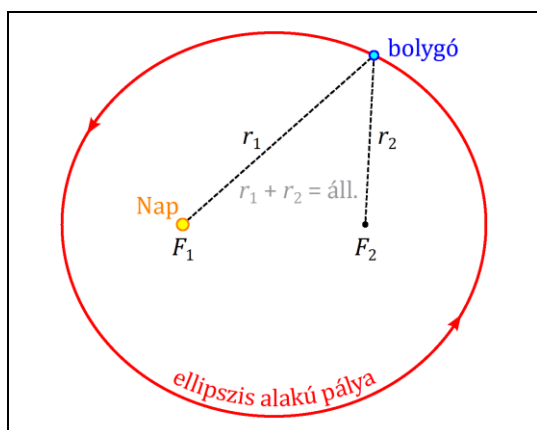


◀	Tartalom	Fogalmak	Törvények	Képletek	Lexikon	▶
---	----------	----------	-----------	----------	---------	---

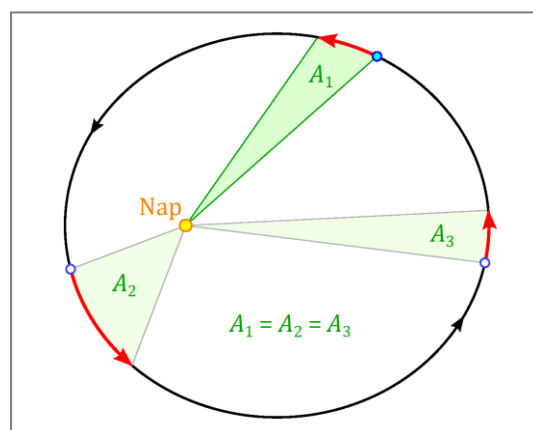
A Kepler-törvények

A bolygókra vonatkozó pontos csillagászati mérések adatait felhasználva Kepler német csillagász három törvényt állapított meg, amelyek leírják a Naprendszer bolygóinak mozgását.

Kepler I. törvénye: Minden bolygó a Nap körül ellipszispályán kering. Az ellipszis egyik fókuszpontjában a Nap van. A bolygók tehát nem körpályán mozognak, ezért hol közelebb, hol távolabb kerülnek a Naptól. A Naptól a bolygóhoz húzott szakaszt vezérsugárnak nevezzük. A vezérsugár hossza tehát a keringés során változik. A Földnél ez a változás viszonylag kicsi, a Merkúr, a Mars és a Plútó pályájánál viszont számottevő.

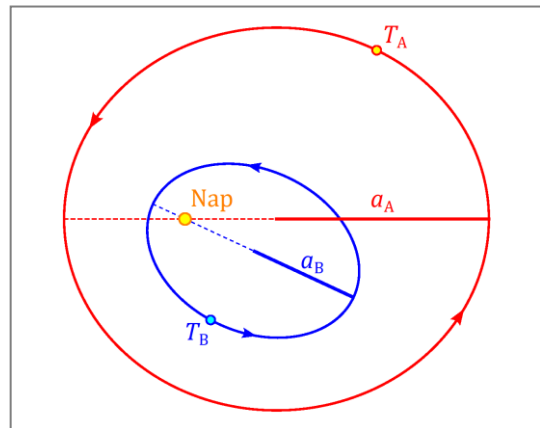


Kepler II. törvénye: A bolygó vezérsugara egyenlő idők alatt egyenlő területeket sűrol. Eszerint a bolygók napközelen nagyobb, naptávolban kisebb sebességgel haladnak. A Nap gravitációs vonzása ugyanis a Naphoz közeledő bolygó sebességét növeli. A Naphoz legközelebb eső helyzetben mozog a bolygó a legnagyobb sebességgel, ezen túljutva a gravitáció lelassítja a bolygó mozgását.



Kepler III. törvénye: A bolygók keringési idejének négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint az ellipszispályák fél nagytengelyeinek a köbei. A rajznak megfelelően, a matematikában szokásos módon a nagytengely felét a -val jelölve, képlettel:

$$\frac{T_A^2}{T_B^2} = \frac{a_A^3}{a_B^3}.$$



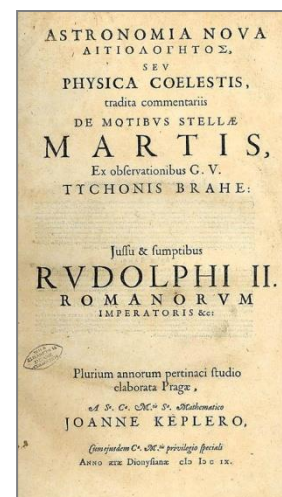
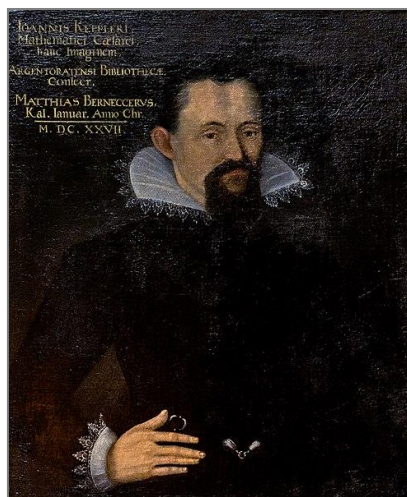
A nagyobb távolságra keringő bolygónak tehát több időre van szüksége az amúgy is hosszabb pálya megtételére, emiatt a belső bolygók gyorsabban, a külsők lassabban mozognak.

A Kepler-törvények csupán leírják a bolygók mozgását, de nem adnak magyarázatot a mozgás okára. A *Newton-féle gravitációs törvény és a Newton-törvények alapján azonban a Kepler-törvények levezethetők*. Ehhez a középiskolai szintet meghaladó matematikai ismeretekre van szükség, de Kepler III. törvénye könnyen igazolható olyan bolygókra, amelyek megközelítően körpályán keringenek. (Lásd a *Kiegészítésekben!*)

Kepler idején (a Földet nem számítva) még csak a Merkúr, Vénusz, Mars, Jupiter, Szaturnusz bolygókat ismerték. Kepler törvényei a később felfedezett bolygók, kisbolygók, és a Nap körül keingő üstökösök mozgására is érvényesnek bizonyultak. Egy-egy bolygó holdjainak a bolygóhoz viszonyított mozgására úgyszintén érvényesek a Kepler-törvények, feltéve, hogy a hold tömege lényegesen kisebb a bolygó tömegénél. Természetesen a holdpályák fókuszpontjában ilyen esetben az adott bolygó van.

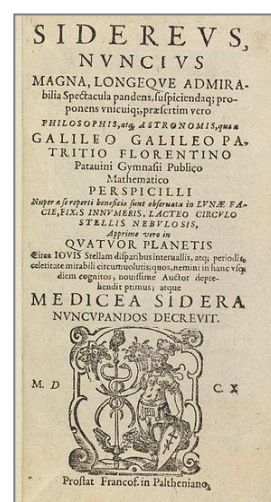
Kiegészítések

1. Tycho Brahe (1546–1601) dán csillagász *II. Habsburg Rudolf* (1552–1612) német-római császár, magyar és cseh király szolgálatában Prágában, udvari csillagászként dolgozott. Tevékenysége során mintegy 20 évig végzett nagyon pontos bolygómegfigyeléseket. (E megfigyelések pontossága 2 szögmásodperc volt, ez a távcső nélküli mérések csúcsát jelentette.)



2. Johannes *Kepler* (1571–1630) német csillagász, matematikus volt. 1600-tól Ticho Brahe aszisztense volt Prágában, majd Brahe 1601-ben bekövetkezett halála után *II. Habsburg Rudolf* udvari csillagászként dolgozott. Elődje pontos mérési adatait felhasználva Kepler először a bolygópályák alakját határozta meg, majd a pályák ismeretében megfogalmazta az első két törvényt. Ezeket az 1609-ben megjelent *Astronomia nova* (Új csillagászat) című művében ismertette. A harmadik törvényt később ismerte fel, ezért azt csak az 1619-ben kiadott *Harmonices mundi* (A világ harmóniájáról) című könyvében tette közzé.

3. Galileo *Galilei* (1564–1642) olasz fizikus, csillagász 1610-ben távcsövével felfedezte a Jupiter négy holdját (Io, Europa, Ganymedes, Callisto). A felfedezett holdak ugyanúgy egy központi égitest körül mozogtak, akárcsak a Nap körül a bolygók, azaz mintegy modelljei voltak a Naprendszernek. Mindez fontos érv volt a kopernikuszi világbkép mellett, mert a Holdon kívül ekkoriban más holdat nem ismertek a csillagászok. Galilei megfigyeléseit 1610-ben a *Sidereus Nuncius* című könyvében tette közzé. (A teljes mű elérhető/letölthető itt:



<https://books.google.hu/books?id=OL9GJV4ytawC&printsec=frontcover>. A könyv ezen példánya Vincenzo Viviani (1622–1703) olasz matematikus, fizikus, Galilei tanítványa könyvtárából származik. Az erről szóló bejegyzés a könyv második oldalán látható.)

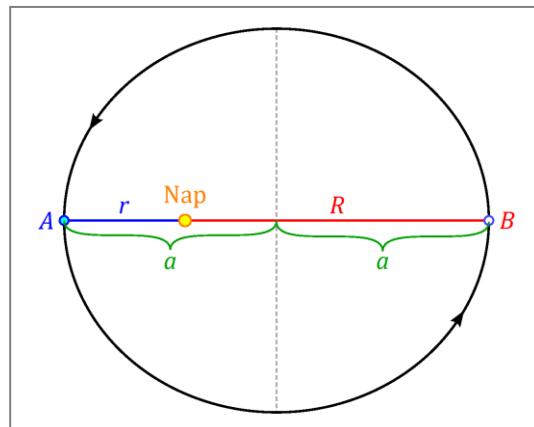
A Jupiter-holdakra vonatkozó részletes, rajzokkal kiegészített megfigyelések a 33–51. oldalon találhatók. Ezekben Galilei az 1610. január 7. – március 2. közti időszakban napról napra rögzítette a Jupiter-holdak helyzetét.

4. Kepler eredetileg a harmadik törvényt a következő alakban fogalmazta meg: *A bolygók keringési idejének négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint a Naptól mért közepes távolságaik köbei.* Számos könyvben ebben a megfogalmazásban szerepel a törvény.

A közepes távolságot a Naptól mért legkisebb és legnagyobb távolság átlagaként, a rajz alapján felírva:

$$\bar{x} = \frac{r + R}{2} = \frac{2 \cdot a}{2} = a.$$

A bolygónak a Naptól mért közepes távolsága egyenlő az ellipszis nagytengelyének felével, tehát a törvény két alakja egyenértékű.



Az ellipszis pontjaira teljesülő $r_1 + r_2 = \text{állandó}$ összefüggést az ellipszis tengelyeinek egy-egy végpontjára (C és B), az alábbi rajz alapján felírva:

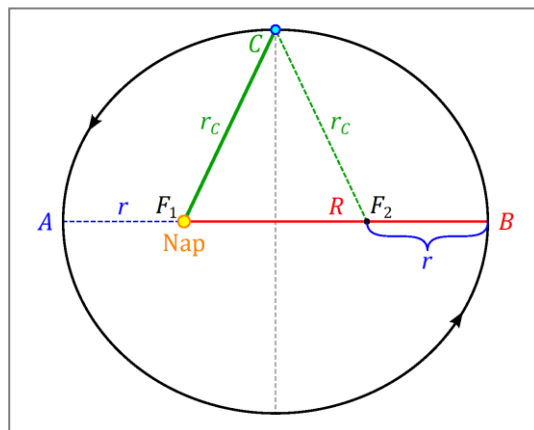
$$r_C + r_C = R + r.$$

Az előzőekben látott $R + r = 2 \cdot a$ miatt:

$$2 \cdot r_C = 2 \cdot a,$$

$$r_C = a.$$

Eszerint az ellipszispálya kistengelyének végpontjában a bolygó éppen a közepes naptávolságnak megfelelő helyzetben van.



5. Megközelítően körpályán keringő bolygókra Kepler III. törvényét levezetéssel is igazolhatjuk. Jelöljük két körpályán mozgó bolygó tömegét m_A -val és m_B -vel, a Nap tömegét pedig M -mel! Mindkét bolygónál a centripetális erő megegyezik a Nap által kifejtett gravitációs erővel. (A bolygók egymásra gyakorolt gravitációs hatása a Naphoz viszonyított kis tömegük miatt elhanyagolható.) Ennek megfelelően:

$$m_A \cdot a_A \cdot \omega_A^2 = \gamma \cdot \frac{m_A \cdot M}{a_A^2} \quad \text{és} \quad m_B \cdot a_B \cdot \omega_B^2 = \gamma \cdot \frac{m_B \cdot M}{a_B^2}.$$

Az egyenleteket osztva a bolygó tömegével, valamint a Naptól mért középtávolsággal:

$$\omega_A^2 = \gamma \cdot \frac{M}{a_A^3} \quad \text{és} \quad \omega_B^2 = \gamma \cdot \frac{M}{a_B^3}.$$

A szögsebességek kifejezhetők a keringési időkkel, így:

$$\frac{4 \cdot \pi^2}{T_A^2} = \gamma \cdot \frac{M}{a_A^3} \quad \text{és} \quad \frac{4 \cdot \pi^2}{T_B^2} = \gamma \cdot \frac{M}{a_B^3}. \quad (1)$$

Az első egyenletet reciprokát a másodikkal megszorozva:

$$\frac{T_A^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T_B^2} = \frac{a_A^3}{\gamma \cdot M} \cdot \frac{\gamma \cdot M}{a_B^3}.$$

Ebből a lehetséges egyszerűsítések után éppen Kepler III. törvényét kapjuk:

$$\frac{T_A^2}{T_B^2} = \frac{a_A^3}{a_B^3}.$$

6. Az előbbi (1) összefüggést a Földre felírva:

$$\frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} = \gamma \cdot \frac{M}{a^3}.$$

(Mivel most csak egyetlen bolygót vizsgálunk, az indexeket elhagytuk.) Ebből a Nap tömegét kifejezve:

$$M = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot a^3}{\gamma \cdot T^2}. \quad (2)$$

Csillagászati mérésekből az a és T ismert, az γ pedig torziós ingával megmérhető, így ezekből a Nap tömege kiszámítható.

A Hold keringési idejét és a Földtől mért közepes távolságát felhasználva *ugyanígy* határozható meg a Föld tömege.

7. *Az égbolt látszólagos mozgása* című fejezetben láttuk, hogy a *csillagászati egység* egy nem SI-mértékegység, melyet elsősorban a Naprendszeren belüli távolságok megadására használnak. Jele AU (**A**stronomical **U**nit), magyarul a CsE rövidítést is használják. Eredeti definíciója szerint a Nap–Föld távolsággal egyenlő, de a Nemzetközi Csillagászati Unió rögzítette a nagyságát:

$$1 \text{ AU} = 149\,597\,870\,700 \text{ m} = 149\,597\,870,700 \text{ km} \approx 150 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

Használata azért terjedt el a csillagászatban, mert a bolygók távolságát csak a 18. század második felében sikerült megmérni, addig csak távolságarányokat tudtak meghatározni (pl. a Nap–Föld-távolsághoz képest). *Kepler* is még csak a Nap–Föld-távolsághoz tudta viszonyítani a bolygók Naptól mért távolságát.

Példa

A Halley-üstökös 75,3 évenként tér vissza napközelbe. Mekkora a Naptól mért közepes távolsága?

Megoldás

Írjuk fel Kepler III. törvényét a Halley-üstökösre és a Földre! Az ehhez szükséges adatok:

$$T_F = 1 \text{ év}$$

$$T_H = 75,3 \text{ év}$$

$$a_F = 1 \text{ AU} \approx 150 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$a_H = ?$$

$$\frac{a_H^3}{a_F^3} = \frac{T_H^2}{T_F^2} \quad \Rightarrow \quad a_H^3 = \frac{T_H^2}{T_F^2} \cdot a_F^3$$

Ebből az üstökös közepes távolsága a Naptól:

$$a_H = \sqrt[3]{\frac{T_H^2}{T_F^2}} \cdot a_F = \sqrt[3]{\frac{(75,3 \text{ év})^2}{(1 \text{ év})^2}} \cdot 1 \text{ AU} \approx 17,8 \text{ AU} = 2663 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

A Halley-üstökös Naptól mért közepes távolsága eszerint 17,8 csillagászati egység, azaz 2663 millió km.

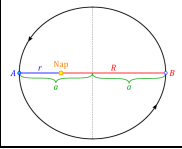
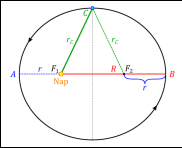
A Halley-üstökös közepes távolsága a Naptól tehát lényegesen nagyobb, mint a Földé. Pályája azonban nagyon elnyújtott, napközelpontja 0,586 AU, naptávolpontja 35,1 AU messze van a Naptól. Ezen adatok is alátámasztják a *Kiegészítések* 4. pontjában igazolt összefüggést, mert

$$a = \frac{r + R}{2} = \frac{0,586 \text{ AU} + 35,1 \text{ AU}}{2} = \frac{35,686 \text{ AU}}{2} \approx 17,8 \text{ AU}.$$



Képek jegyzéke

	Rajz Kepler I. törvényéhez © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0741.svg
	Rajz a vezérsugár fogalmához © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0742.svg
	Rajz Kepler II. törvényéhez © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0743.svg
	Rajz Kepler III. törvényéhez © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0744.svg
	Tycho Brahe arcképe W https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Portr%C3%A4t_av_Tycho_Brahe_-_Skoklosters_slott_-_90153.tif
	Kepler arcképe W https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jean_Keppler.jpg
	Az Astronomia nova címlapja W https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Astronomia_Nova.jpg
	A Sidereus nuncius első kiadásának címlapja (Velece, 1610) W https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sidereus,_nuncius_magna_longeqve_admirabilia_spectacula..._Wellcome_L0072630.jpg

	Rajz a közepes naptávolság és a fél nagytengely közti kapcsolathoz © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0745.svg
	Rajz a kistengely végén lévő bolygó naptávolságának levezetéséhez © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0746.svg
	A Halley-üstökös 1986-ban W https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lspn_comet_halley.jpg

Jelmagyarázat:

© **Jogvéde**tt anyag, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.

W A **Wikimedia Commons**-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásának megfelelően.

◀	Tartalom	Fogalmak	Törvények	Képletek	Lexikon	▶
---	--------------------------	--------------------------	---------------------------	--------------------------	-------------------------	---